

Procesamiento de patrones de franjas: Conceptos fundamentales.

Ricardo Legarda Sáenz*, Jorge Carlos Lugo Jiménez⁺

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán.
rlegarda@uady.mx*, jlugo@uady.mx⁺

Abstract

This paper is the first of a series of outreach publications which will present various fringe-processing techniques, widely used as means of capturing the measurement information on optical techniques. In particular, the purpose of this paper is present to the reader a brief introduction to the physical aspects that makes possible the formation of a fringe pattern and how it is used for measuring several physical quantities.

Resumen

Este trabajo es el primero de una serie de publicaciones de divulgación donde se expondrán varias técnicas de procesamiento de patrones de franjas, utilizados ampliamente como medio de captura de la información de medición en las técnicas ópticas. En particular, el propósito de este trabajo es exponer al lector un breve introducción a los aspectos físicos que hace posible la formación de un patrón de franjas y su utilización para la medición de diferentes magnitudes físicas.

1. Introducción

El enigma sobre la luz se mantuvo por más de 18 siglos, desde los antiguos pitagóricos hasta la época del gran físico inglés Isaac Newton, quien empezó a estudiar este fenómeno mediante el método científico en el año 1666. A partir de esta fecha, grandes científicos han estudiado y comprendido algunos aspectos de la interacción de la luz con la materia. Sin embargo, su naturaleza aún encierra un extraño comportamiento dual, presentando características propias de partículas en ciertos fenómenos y de naturaleza ondulatoria en otros. A pesar de no entender completamente la naturaleza de la luz, podemos usar sus propiedades para lograr importantes avances tecnológicos. En este sentido, la metrología óptica es la rama de la óptica que tiene como propósito efectuar medidas de muy alta precisión usando las ondas de la luz como escala.¹

Este es el primero de una serie de artículos que describen el conjunto de técnicas utilizadas por la metrología óptica para medir diversas magnitudes físicas de objetos bajo estudio, como pueden ser composición química, temperatura, dimensiones, entre otras; así como el modelado matemático para estimar estas cantidades. Todas estas mediciones se basan en la cuantificación de los cambios que sufre la luz al interactuar con los objetos en cuestión.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 78-01, 78A55, 78M25.

Keywords and phrases: Metrología óptica, procesamiento de franjas.

¿Que es la luz?

No existe, hasta este momento, una forma clara para definir la naturaleza fundamental de la luz. Se puede decir que es una forma de energía con dos características principales:^{2,3}

- Tiene movimiento. Cuando cesa este movimiento, deja de ser luz.
- En su movimiento lleva consigo una gran cantidad de información.

Mas allá de esto, solo podemos hablar del comportamiento de la luz al interactuar con la materia (fotografías, bronceado de la piel, por mencionar algunas) y entre ella misma (interferencia). Adicionalmente, podemos definir límites artificiales que nos permiten diferenciar la luz de otras formas de energía (electricidad, calor, sonido), basados esencialmente en la forma de interacción y comportamiento en lugar de utilizar una definición de su naturaleza fundamental.

Para los fines de la metrología óptica no es necesario entender exactamente que es la energía luminosa, solo nos basta poder describir y predecir su propagación e interacción con la materia. Sin embargo, esto no es simple dado que no se conoce la naturaleza fundamental de la luz, como se ha mencionado previamente. A través de la historia se han desarrollado dos metodologías para describir el comportamiento de la luz: la mecánica cuántica y la teoría ondulatoria electromagnética,^{2,3} donde el uso de una de estas metodologías está directamente relacionadas con la aplicación en que se utiliza. Para nuestros fines en este trabajo sólo usaremos el modelo electromagnético.

Modelo electromagnético

En 1864 el físico escocés James Clerk Maxwell propuso su teoría electromagnética de la luz con la que logró explicar todos los fenómenos conocidos en ese tiempo, tales como la reflexión, difracción, refracción, etc. así como el cálculo directo de la velocidad de la luz. Este modelo considera a la luz como una energía en forma de ondas electromagnéticas. Esta teoría no es completamente adecuada, ya que no puede describir fenómenos tales como la emisión de luz y la foto-resistividad. Sin embargo, muchos de los fenómenos utilizados en la metrología óptica (como son la interferencia, la refracción y la difracción) pueden ser descritos perfectamente por este modelo. El comportamiento de las ondas electromagnéticas está descrito por las ecuaciones de Maxwell, donde se establece que el tren de ondas se puede describir en términos de dos vectores, el vector eléctrico \mathbf{E} y el vector magnético \mathbf{H} , que son perpendiculares entre sí y perpendiculares con respecto al eje de propagación de la onda. Si conocemos \mathbf{E} y \mathbf{H} en función del tiempo y la posición en el campo electromagnético, podemos describir completamente la onda -el desplazamiento eléctrico, la densidad de corriente, y la inducción magnética- y su interacción con los materiales: conductividad específica, constante dieléctrica que se relaciona con el índice de refracción, la permeabilidad magnética y la densidad de carga eléctrica.²

2. Ecuación de onda electromagnética

En un medio no conductor y libre de carga, las ecuaciones de Maxwell se reducen a una ecuación de onda para el vector eléctrico \mathbf{E} en función del tiempo y la posición. Esta ecuación está definida como⁴

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \kappa \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

donde ∇^2 es el operador laplaciano y los parámetros del sistema están dados por κ la constante dieléctrica del medio, μ la permeabilidad magnética; ambos parámetros se relacionan como $v^2 = 1/\kappa\mu$, siendo v la velocidad de propagación de la onda en el medio. La ecuación (2.1) muestra la relación que existe entre el vector eléctrico, la propiedades del material, la velocidad de la onda y las coordenadas espaciales.

En la metrología óptica se considera solamente campos eléctricos que se desplazan en la dirección de su propagación. En este caso, si el campo eléctrico de longitud de onda λ se propaga en un medio homogéneo en

la dirección \hat{z} , entonces la ecuación (2.1) se reduce a una ecuación de onda monocromática unidimensional, cuya solución es una onda armónica que se propaga en la dirección del eje z , definida como⁴

$$\psi(z, t) = U \cos \left[2\pi \frac{z}{\lambda} - 2\pi\nu t + \delta \right], \quad (2.2)$$

donde U es la amplitud de la onda, λ es la longitud de onda, ν es la frecuencia óptica (número de ondas por unidad de tiempo), $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda y δ es un constante que introduce un desplazamiento. Un ejemplo de esta onda se muestra en la figura 1.

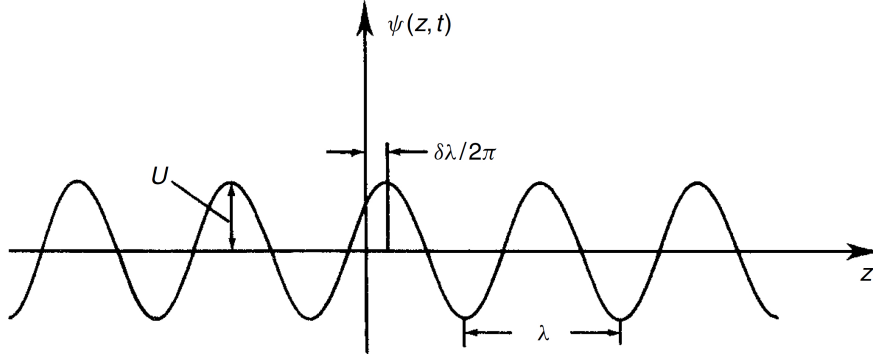


Figura 1: Onda electromagnética.

La relación entre la frecuencia y la longitud de onda está dada por

$$\lambda\nu = v.$$

En el caso de ondas electromagnéticas viajando en el vacío tendremos que

$$v = c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s},$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. La relación de la velocidad c de una onda electromagnética en el vacío respecto a la velocidad de la onda en un medio dado es conocida como el valor absoluto del índice de refracción n del medio, esto es

$$n = \frac{c}{v}.$$

Usualmente la metrología óptica trabaja con longitudes de onda que están en los rangos de $\lambda = 300 - 900 \times 10^{-9}$ metros, con frecuencias de $\nu = 43 - 75 \times 10^{13}$ Hz, las cuales corresponden al espectro visible de la luz y una parte del espectro infrarrojo y ultravioleta. El espectro electromagnético se muestra en la figura 2, donde se puede apreciar que la luz visible es solo una pequeña porción de las ondas existentes en la naturaleza.

3. Interferencia de ondas de luz

3.1. Representación compleja de la onda de luz

La representación de la onda, mostrada en la ecuación (2.2), define una onda que se propaga solamente por el eje z . En el caso general, la onda se propaga en la dirección de un vector unitario \hat{n} , definido por los cosenos directores como

$$\hat{n} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}.$$

y la expresión que describe el campo en una posición arbitraria $\mathbf{r} = (x, y, z)$ en un medio homogéneo está dada como

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= U \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2\pi\nu t + \delta) \\ &= U \cos(k \hat{n} \cdot \mathbf{r} - 2\pi\nu t + \delta). \end{aligned} \quad (3.1)$$

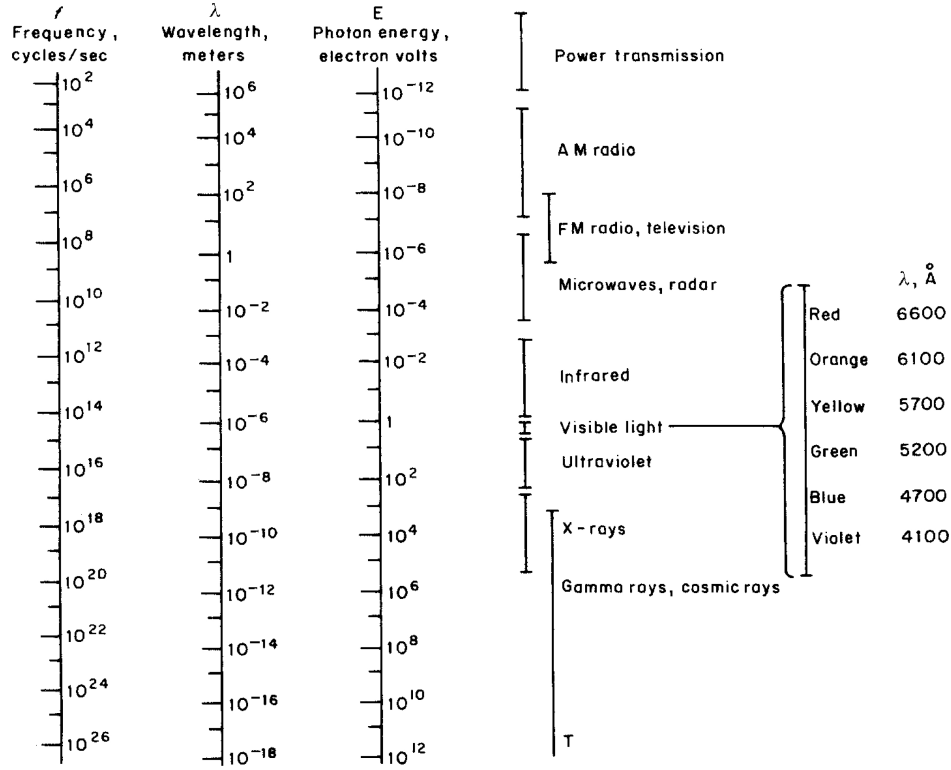


Figura 2: Espectro electromagnético (Imagen tomada de ref. ¹).

El producto escalar $\hat{n} \cdot \mathbf{r} = \text{constante}$ define planos que son perpendiculares a la dirección de propagación \hat{n} , tal como se puede observar en la figura 3. En el campo de la óptica comúnmente se le conocen como frentes de onda. Las ondas definidas por las ecuaciones (2.2) y (3.1) se denominan ondas planas.

La representación de la onda plana, definida en la ecuación (3.1), puede ser escrita en forma compleja como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ U e^{i(k \hat{n} \cdot \mathbf{r} - 2\pi\nu t + \delta)} \right\}. \quad (3.2)$$

Esta representación, a pesar de ser difícil de visualizar e interpretar, facilita el análisis de la propagación e interacción de múltiples ondas en sistemas ópticos complejos, tales como los utilizados en holografía interferométrica y difracción ¹. Una de las ventajas de esta representación es la factorización de los términos espaciales y temporales; esto es, podemos separar la ecuación (3.2) en los siguientes términos

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= U e^{i(k \hat{n} \cdot \mathbf{r} - 2\pi\nu t + \delta)} \\ &= U e^{i(k \hat{n} \cdot \mathbf{r} + \delta)} e^{-i2\pi\nu t}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para las mediciones basadas en la propagación de la luz se utilizan frentes de onda distintos a un plano, tales como frentes de onda esféricos, cilíndricos, e inclusive frentes de onda que describen superficies complejas. Estos frentes de onda viajan a través de medios no homogéneos; es decir, en medios cuyos índices de refracción que varían tanto en el espacio como en el tiempo. La luz al viajar a través de estos medios tiene variaciones en su velocidad, por lo que recorre diferentes distancias en un mismo período de tiempo. La medición se realiza al estimar el camino que recorre la luz al propagarse a través de estos medios; esta distancia recorrida por la onda luminosa se le denomina *longitud de camino óptico*, la cual se puede expresar en términos del índice de refracción del medio que recorre; esto es

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int c dt = \int n(\mathbf{r}) ds,$$

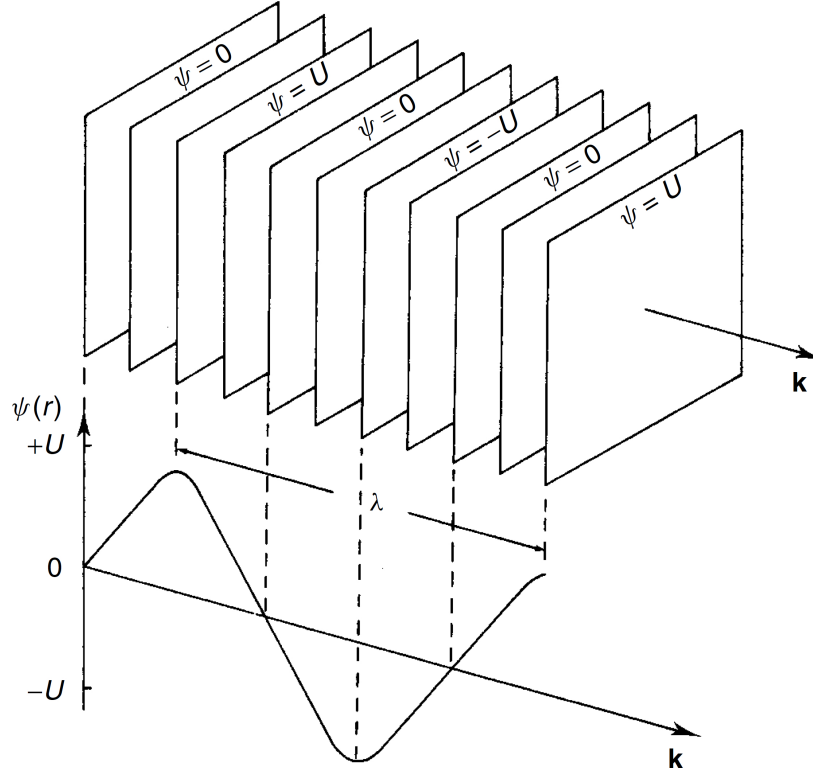


Figura 3: Frente de onda plano.

a partir del cual definimos el *término de fase*, o frente de onda

$$\theta(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{\lambda} \varphi(\mathbf{r}) = k \varphi(\mathbf{r}) = \text{constante}, \quad (3.4)$$

Utilizando las ecuaciones (3.3) y (3.4), podemos definir una onda que se propaga través de medios no homogéneos como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = U e^{i[\theta(\mathbf{r}) + \delta]} e^{-i[2\pi\nu t]}. \quad (3.5)$$

Como se puede observar en esta ecuación, encontramos que existe la posibilidad de realizar mediciones por medio de la luz al detectar los cambios en el término de fase de la onda, los cuales podríamos relacionar con los cambios del índice de refracción en los medios donde la luz se propagó. Aunque en teoría es posible realizar esta medición, no existe en la actualidad un medio que permita obtener mediciones directas del haz luminoso. Los detectores más comunes, tales como películas fotográficas, fotoceldas, cámaras digitales e incluso nuestros ojos, solo son capaces de registrar la irradiancia (potencia por unidad de área), llamada comúnmente intensidad, la cual está definida como³

$$I = \frac{\kappa\nu}{2} |\psi|^2,$$

aunque comúnmente se utiliza la siguiente aproximación³

$$I = |\psi|^2 = U^2. \quad (3.6)$$

Como se puede apreciar, con la tecnología actual solo estaríamos en condición de obtener la amplitud de la onda de luz, de la cual no podemos extraer información alguna que fuera útil para nuestra medición. Visualmente, la amplitud de la onda corresponde a un mancha brillante que puede variar en su brillo si hubo alguna atenuación debido al medio por donde se propagó. Un ejemplo de la captura de la irradiancia por una cámara CCD (siglas en inglés de *charge-coupled device*)¹ lo podemos observar en la figura 4.

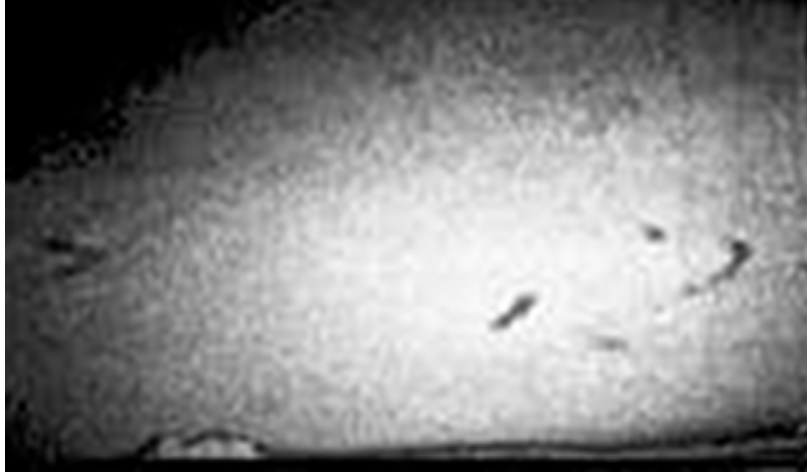


Figura 4: Irradiancia de un frente de onda.

3.2. Interferencia de dos ondas

Debido a las restricciones que nos impone la tecnología actual, nuestra única posibilidad para hacer mediciones utilizando la luz consiste en incluir la información del término de fase en la expresión que describe la intensidad; de esta forma cualquier dispositivo podría detectar los cambios en la fase y cuantificarlos. Esta modificación es la parte fundamental del uso de la luz como herramienta de medición y se lleva a cabo de la siguiente forma:

Consideremos que tenemos dos ondas *que surgieron de la misma fuente de luz*^a, viajaron por diferentes trayectorias y al final se combinan en un plano de observación. Esta combinación de ondas es lo que llamamos interferencia²; la cual, junto con el fenómeno de la difracción, son los fundamentos de las técnicas de la metrología óptica¹. Si definimos estas ondas como

$$\psi_1(\mathbf{r}) = U_1 e^{i\theta_1(\mathbf{r})}, \quad (3.7)$$

$$\psi_2(\mathbf{r}) = U_2 e^{i\theta_2(\mathbf{r})}, \quad (3.8)$$

la onda resultante de la combinación de las ondas ψ_1 y ψ_2 está definida como $\psi_{res} = \psi_1 + \psi_2$, y por tanto, la irradiancia estará definida como

$$\begin{aligned} I &= |\psi_1 + \psi_2|^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos[\theta_1(\mathbf{r}) - \theta_2(\mathbf{r})], \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos[\theta_1(\mathbf{r}) - \theta_2(\mathbf{r})], \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos[\phi(\mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{\lambda} (\varphi_1(\mathbf{r}) - \varphi_2(\mathbf{r})).$$

La ecuación (3.9) es uno de los resultados teóricos que dan sustento a las mediciones basadas en la propagación de la luz. La importancia de ésta ecuación radica en el hecho de obtener un patrón de intensidad modulado por un término cosenoidal, a diferencia de la mancha brillante descrita por la ecuación (3.6), donde las variaciones en la intensidad están relacionadas directamente con las diferencias de camino óptico existente entre las dos ondas; es decir, en la intensidad resultante está contenida la información de la comparación de las trayectorias de las dos ondas luminosas. Si la trayectoria de una de estas ondas es conocida, ésta se puede utilizar como referencia tal como se hace en los sistemas de medición, donde cada parámetro tiene su patrón-base de referencia. Un ejemplo de estos patrones de interferencia se muestran en la figura 5; usualmente este tipo de patrones se llaman patrones de franjas debido a la secuencia de tonos claros y oscuros que se obtiene en la interferencia.

^aSolamente ondas que emergen de la misma fuente pueden interferir entre sí².



Figura 5: Patrón de Interferencia.

4. Procesamiento de los patrones de franjas

4.1. Un problema mal-planteado

En forma general, el modelo matemático de un patrón de franjas se puede escribir como

$$I(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) + b(\mathbf{r}) \cos[\phi(\mathbf{r})] \quad (4.1)$$

donde $a(\mathbf{r})$ está relacionada con la intensidad de la fuente de luz, $b(\mathbf{r})$ con la dispersión que provoca cambios en la modulación del perfil cosenoidal. Otra forma común de expresar la ecuación (4.1) es escribirla de la siguiente manera

$$I(\mathbf{r}) = I_o(\mathbf{r}) \{1 + V(\mathbf{r}) \cos[\phi(\mathbf{r})]\} \quad (4.2)$$

donde $I_o(\mathbf{r})$ está relacionada con la intensidad de la fuente de luz y $V(\mathbf{r})$ es la visibilidad del patrón de franjas.

El punto central del procesamiento de los patrones de franjas, descritos por las ecuaciones (4.1) y (4.2), es extraer el término de fase $\phi(\mathbf{r})$ del patrón de franjas utilizando técnicas de procesamiento de imágenes y de esta forma encontrar la distribución espacial de los cambios del camino óptico al viajar a través del objeto bajo prueba, la cual está en fracciones de longitud de onda, definida en nanómetros, por lo que las mediciones tendrán una gran precisión.

A pesar de ser un modelo simple, el procesamiento de los patrones de franjas es un problema mal-planteado en el sentido de Hadamard⁵, ya que la función coseno tiene las siguientes propiedades que hacen que la solución no sea única para un mismo dato de entrada⁶:

$$\begin{aligned} \cos(\phi) &= \cos(-\phi) \\ \cos(\phi) &= \cos(\phi + 2\pi n), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Mas aún, si uno evalúa el patrón de franjas descrito en la ecuación (4.1), asumiendo por simplicidad que $a(\mathbf{r}) = 0$ y $b(\mathbf{r}) = 1$, obtendremos $\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \arccos[I(\mathbf{r})]$, el cual es un valor diferente de ϕ ⁶. Esta problemática se puede ver claramente en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1 *Tenemos dos términos de fase definidos como*

$$\phi_a(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{\lambda} x, \quad \phi_b(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{\lambda} |x|;$$

donde utilizamos por simplicidad $\frac{2\pi}{\lambda} = 1$. Utilizando la ecuación (4.1) con $a(\mathbf{r}) = 0$, definimos los patrones de franjas que generan los términos de fase anteriores como

$$I_a = 2.5 \cos(\phi_a(\mathbf{r})) \quad I_b = 2.5 \cos(\phi_b(\mathbf{r})),$$

y la solución analítica mal-planteada de cada término de fase como

$$f_a = \arccos\left(\frac{I_a}{2.5}\right) \quad f_b = \arccos\left(\frac{I_b}{2.5}\right).$$

Evaluamos cada uno de los términos anteriores para $x = 0, 1 \dots 99$, y mostramos los resultados en la figura 6. Como se puede apreciar en esta figura, los patrones de franjas y los términos de fase estimados para ambos casos son iguales, a pesar de las diferencias significativas entre los términos de fase propuesto originalmente.

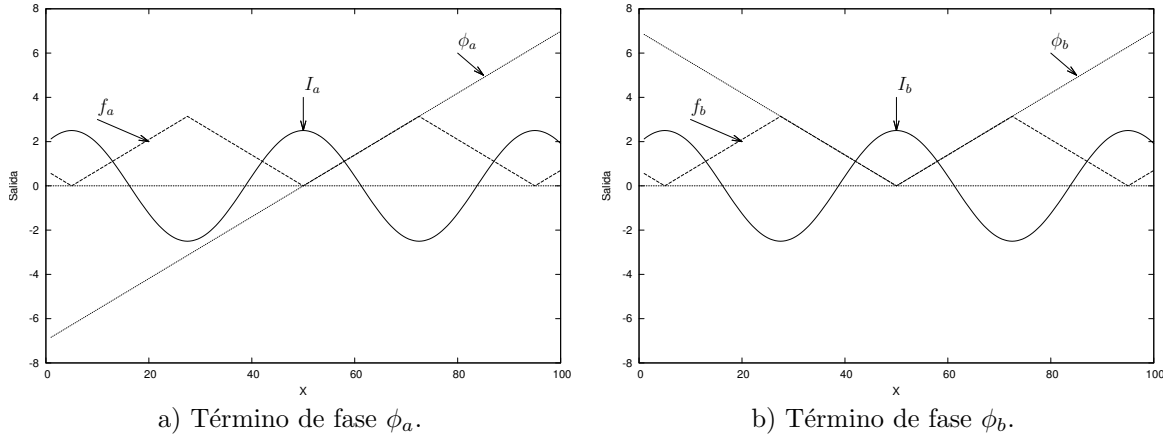


Figura 6: Gráficas del ejemplo 4.1.

4.2. Solución al problema del procesamiento de franjas

Como se pudo apreciar en el ejemplo 4.1, es necesario encontrar un procedimiento que nos permita obtener el término de fase sin ambigüedades. Existen varias técnicas para procesar los patrones de franjas, que dependen de la naturaleza del experimento y el número de patrones disponibles;⁷ pero en todos los casos, el objetivo de estas técnicas es evitar la utilización directa de la función **coseno** (o **seno**) en la estimación.

De forma general, la idea detrás de muchas de estas técnicas es obtener un patrón similar al descrito en las ecuaciones (4.1) y (4.2), definido como

$$I(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) + b(\mathbf{r}) \sin[\phi(\mathbf{r})], \quad (4.3)$$

de tal forma que, una vez filtrado el término $a(\mathbf{r})$ en ambos patrones de franjas,⁷ podemos estimar la fase utilizando la siguiente expresión

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \arctan_2 \left[\frac{b(\mathbf{r}) \sin \phi(\mathbf{r})}{b(\mathbf{r}) \cos \phi(\mathbf{r})} \right], \quad (4.4)$$

donde \arctan_2 es la función que calcula el valor principal del tangente inverso usando los signos de los argumentos y cuyos valores de salida están en los rangos $(-\pi, \pi]$. En la literatura, al proceso de estimar el término de $\hat{\phi}(\mathbf{r})$ ó $\phi(\mathbf{r})$ utilizando la ecuación (4.4) (u otra equivalente) se le denomina *demodulación de fase*.⁷ Si utilizamos la ecuación (4.4) en los términos de fase del ejemplo 4.1, podemos encontrar que se pueden discriminar sin ambigüedades cada términos de fase, como se puede apreciar en la figura 7.

Como se puede apreciar en los resultados mostrados en la figura 7, el término $\hat{\phi}(\mathbf{r})$ es el valor principal de $\phi(\mathbf{r})$; ésta relación se puede describir como

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) + 2\pi k(\mathbf{r}), \quad (4.5)$$

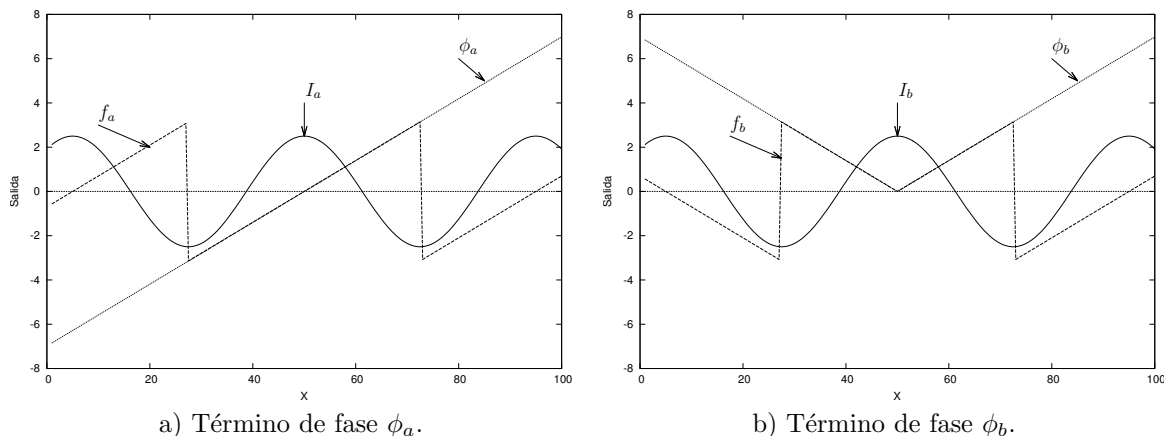


Figura 7: Gráficas del ejemplo 4.1, utilizando la ecuación (4.4).

donde $k(\mathbf{r})$ es una función entera que asegura que $\pi < \hat{\phi}(\mathbf{r}) \leq \pi$. En la literatura, al término $\hat{\phi}(\mathbf{r})$ se le llama *fase envuelta* (en inglés *wrapped phase*) y el proceso para obtener el término $\phi(\mathbf{r})$ a partir de la ecuación 4.5 se le llama *desenvolvimiento de fase* (en inglés *phase unwrapping*).^{7,8}

5. Puntos finales

La metrología óptica constituye un poderoso medio de medición. Las ventajas de los métodos ópticos con respecto a métodos mecánicos tradicionales son: su respuesta rápida, no son invasivos ni de contacto, son altamente sensibles y con gran precisión, además de tener una alta resolución al ser mediciones de campo completo.^{1,8-11} La herramienta básica de trabajo de la metrología óptica es el patrón de franjas, por lo que resulta importante entender como se forman las imágenes y como pueden ser procesadas. A manera de resumen, podemos enumerar los pasos a seguir para procesar adecuadamente un patrón de franjas:¹¹

Demodulación de la fase. Consiste en obtener la distribución espacial de la fase, o mapa de fase, ya sea utilizando la ecuación (4.4) u otro procedimiento equivalente. En este paso se puede usar uno o más patrones de franjas dependiendo de la naturaleza del experimento; también previo a este paso se puede filtrar la imagen para eliminar el ruido o corregir el rango dinámico de la intensidad con el fin de facilitar la demodulación.

Desenvolvimiento de la fase. En la gran mayoría de los casos, en el paso anterior se obtiene un mapa de fase que contienen discontinuidades, las cuales corresponden a los valores principales del término $\phi(\mathbf{r})$. En este paso se busca eliminar las discontinuidades al estimar la fase $\phi(\mathbf{r})$ a partir de la ecuación (4.5). Sin embargo, este paso es siempre complicado de implementar ya que la detección precisa de las discontinuidades se ven afectadas por el ruido, además de ser un proceso muy demandante en términos computacionales.⁸ Mucho del trabajo actual de investigación en el procesamiento de franjas está dirigido hacia el desarrollo de métodos donde la estimación de la fase se realice sin recurrir al desenvolvimiento de fase.

Escalamiento de la distribución espacial de la fase. Una vez obtenido la fase, se hace la conversión entre la distribución espacial de la fase y el dominio espacial del objeto bajo análisis.

En cada una de estas etapas existen un gran número de técnicas que resultan de gran interés entender sus principios de funcionamiento; ya que con el desarrollo de nuevas tecnologías de cómputo y almacenamiento de información, aunado a la disminución del costo de los equipos, estas técnicas se han convertido en la base del desarrollo de sistemas de medición y reconstrucción tridimensionales en tiempo real. Ejemplo de esto, hoy en día es posible tomar grandes secuencias de imágenes que permite analizar el comportamiento dinámico de un objeto en intervalos menores a los milisegundos.¹² En próximos artículos, se analizarán con más

detalle los modelos matemáticos y su implementación de las técnicas más representativas para demodular y/o desenvolver uno o más patrones de franjas.

Referencias

- [1] Kjell J. Gasvik. *Optical Metrology*. Wiley, third edition, 2002. ISBN 0470843004.
- [2] Max Born and Emil Wolf. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, 1999. ISBN 0521642221.
- [3] Bahaa E. A. Saleh and Malvin Carl Teich. *Fundamentals of Photonics*. Wiley-Interscience, second edition, 2007. ISBN 0471358320.
- [4] Eugene Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, fourth edition, 2001. ISBN 0805385665.
- [5] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. *Solutions of Ill Posed Problems*. Vh Winston, 1977. ISBN 0470991240.
- [6] John W. Harris and Horst Stocker. *Handbook of Mathematics and Computational Science*. Springer Verlag, 1998. ISBN 0387947469.
- [7] Zacarias Malacara and Manuel Servin. *Interferogram Analysis For Optical Testing*. CRC Press, second edition, 2005. ISBN 1574446827.
- [8] Dennis C. Ghiglia and Mark D. Pritt. *Two-Dimensional Phase Unwrapping: Theory, Algorithms, and Software*. Wiley-Interscience, 1998. ISBN 0471249351.
- [9] Thomas Kreis. *Holographic Interferometry: Principles and Methods*. Wiley-VCH, 1996. ISBN 3055016440.
- [10] Daniel Malacara. *Optical Shop Testing*. Wiley-Interscience, New York, third edition, 2007.
- [11] Gannavarpu Rajshekhar and Pramod Rastogi. Fringe analysis : Premise and perspectives. *Optics and Lasers in Engineering*, 50(8):iii–x, 2012. URL <http://www.sciencedirect.com/science/journal/01438166/50/8>.
- [12] Arturo Espinosa-Romero and Ricardo Legarda-Saenz. GPU based real-time quadrature transform method for 3-D surface measurement and visualization. *Optics Express*, 19(13):12125–12130, 2011. URL <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=oe-19-13-12125>.