

Comparación y evaluación de modelos GARCH con errores de distribución normal en el modelado del IPyC

^aRicardo Antonio Chan Cab, ^bSalvador Medina Peralta, ^cMa. Diódora Kantún Chim, ^dLuis Colorado Martínez

^{a,b,c,d}Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, México.

^aricardo.chancab@gmail.com, ^bmperalta@correo.uady.mx, ^ckchim@correo.uady.mx,
^dluis.colorado@correo.uady.mx.

Abstract

In financial sector, one of the main study fields is financial series. Particularly, the study of behavior of return series of underlying assets that exists in the market. For this, various statistic and econometric models have been applied to model this behavior, mainly by time series. However, in practice, it has been found that financial series have special characteristics that does not allow study them with traditional methods of time series, mainly caused by volatility of underlying assets. To solve this problem, many models have been proposed to try to capture these characteristics, like stochastic volatility or conditional heteroskedastic models, particularly, the Generalized Autorregresive Conditional Heteroskedastic model (GARCH). The present work makes a comparative between GARCH model and a variant thereof, comparing the fit to the return series and forecasts of each model; likewise, a methodology is described make the fit. The Prices and Quotes Index (IPyC) return series of the Mexican Stock Exchange will be the index used in the work.

Resumen

En el ámbito financiero uno de los principales campos de estudio es el de las series financieras. De manera particular, el estudio del comportamiento de las series de los retornos o rendimientos de los diversos activos subyacentes que existen en el mercado de valores. Actualmente existen diversos modelos econométricos y estadísticos que se aplican para modelar el comportamiento de éstas series, principalmente por medio del uso de series temporales. Sin embargo, en la práctica se ha observado que las series financieras presentan características muy propias que dificultan su estudio con los métodos tradicionales de la teoría estadística de las series de tiempo, causados por los efectos de la volatilidad de los precios de los activos subyacentes. Para solucionar el problema de hallar un modelo que se ajuste correctamente a éstas series, se han propuesto varias opciones sensibles a tales características, tales como los modelos de volatilidad estocástica o los de heterocedasticidad condicional; en particular, el modelo GARCH (por sus siglas en inglés, *Generalized Autorregresive Conditional Heteroskedastic model*). En el presente trabajo se comparan el modelo GARCH original y una variante del mismo tomando en cuenta el ajuste a la serie histórica de los retornos y la precisión en los pronósticos de cada modelo; asimismo se describe una metodología para el ajuste de éstos. La serie de retornos a usar será la del Índice de Precios y Cotizaciones (IPyC) de la Bolsa Mexicana de Valores.

Keywords and phrases : volatilidad, series de tiempo, series financieras, retornos, activos financieros, pronósticos, varianza condicional.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 62M10,62P05,62P20

Fecha de recepción: Junio 11, 2015 / Fecha de aceptación: Julio 19, 2017

1. Introducción

El presente trabajo aborda el tema de las variaciones porcentuales del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. Éste índice es de principal importancia para el país pues representa el comportamiento actual del mercado nacional, de donde puede inferirse las tendencias o principales movimientos económicos que se están dando en las principales empresas nacionales. Se abordará este tema con el enfoque de Tsay (1984), que propone una metodología a seguir para la modelación de las series de retornos financieros, en la cual, el ruido (componente aleatorio) se ajusta mediante un modelo de la familia ARCH. El objetivo del trabajo es hacer una comparación de ajuste con variantes de ésta familia de modelos heterocedásticos aplicados a las características que presenta el IPyC, tales como el modelo GARCH y el EGARCH, así como una evaluación de la capacidad predictiva que tienen estos modelos para esta serie en particular.

Se han hecho trabajos similares en cuanto al objetivo de éste trabajo, por ejemplo, en Robles (2002) se trata una gran cantidad de modelos para la volatilidad de los retornos financieros y se hace un comparativo de la capacidad predictiva de varios de éstos con datos del IBEX-35, el índice bursátil de la bolsa de valores de España. Al final, no puede determinar que alguno de los modelos propuestos sea el más adecuado para modelar la volatilidad pues asegura que haría falta ser más preciso en las definiciones de muchos factores que pueden ser de interés para dar por preferente a alguno de los modelos por sobre los otros. En Casas y Cepeda (2008) de igual forma se hace una descripción exhaustiva acerca de los modelos ARCH, GARCH y EGARCH además de implementarse una aplicación comparativa entre éstos modelos y su capacidad de ajuste sobre los retornos de la compañía Gillete. Lo que se puede resaltar de éste trabajo es el uso de las medidas de información BIC y AIC como criterios de comparación entre los modelos. En Çifter y Ozün (2007) se hace un trabajo en el que se evalúa la capacidad predictiva del modelo GARCH y algunas variantes de éste modelo. Se trabaja con cinco modelos de volatilidad condicional, los cuales varían en distribución para los errores: normal estándar, t de Student y t de Student sesgada. Los resultados de las comparaciones demostraron que el modelo que resultó con mejores capacidades predictivas fue el NMAGARCH (Normal Mixture Asymmetric GARCH). En Ruíz (2011) se presenta un estudio acerca del índice de volatilidad en México, VIMEX, donde se usan los log-retornos semanales del índice y se proponen diversos órdenes de los procesos GARCH y ARCH para modelar el ruido de la serie, y se comparan tales modelos mediante los valores AIC y BIC obtenido por cada modelo. El modelo propuesto final es un modelo tipo GARCH puro, GARCH(1,1) para modelar la serie de los retornos de dicho índice. Al final concluye con la recomendación de utilizar suposiciones distintas para la distribución de los errores del proceso GARCH, tales como la distribución t de Student o la distribución de errores generalizados.

2. El índice de Precios y Cotizaciones

Los índices son medidas estadísticas diseñadas para mostrar los cambios de una o más variables relacionadas a través del tiempo. La función de un índice accionario es reflejar el comportamiento conjunto de un grupo de acciones. Pueden ser usados de tres formas: como indicador del funcionamiento y dirección de los mercados, como punto de comparación de desempeño para los asesores de inversiones y como base de un instrumento o producto de inversión.

El índice de precios y cotizaciones (denotado por I_t) es el índice más importante y representativo de la Bolsa Mexicana de Valores. Está conformado por una muestra de 35 emisoras, seleccionando a la serie accionaria más bursátil (la de mayor grado de facilidad de compra o venta en el mercado) en el mercado accionario y es el de mayor representatividad hacia inversionistas locales y extranjeros. El IPyC se formuló por primera vez en octubre de 1978 con base $I_0 = 0.78162$. La muestra se revisa una vez al año (agosto) y tradicionalmente se sustituye a un grupo de cinco a seis acciones. El cálculo del valor del índice está dado por la siguiente fórmula (ver [BMV 2012]):

$$I_t = I_{t-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^{35} P_{it} \times Q_{it} \times FAF_i}{\sum_{i=1}^{35} P_{i,t-1} \times Q_{i,t-1} \times FAF_i \times f_{i,t-1}} \right), \quad (2.1)$$

donde:

I_t : Índice al día t .

P_{it} : Precio de la serie accionaria i al día t .

Q_{it} : Acciones inscritas de la serie accionaria i el día t .

FAF_i : Factor de ajuste por acciones flotantes de la serie accionaria i .

$f_{i,t}$: Factor de ajuste por ex-derechos de la serie accionaria i al día t .

Éste es el índice que diariamente se proporciona en los medios informativos y la prensa en forma general. Puesto que durante el día este valor se va actualizando momento a momento, el valor que se reporta es únicamente el último que tiene al momento en que las instituciones financieras en México dejan de laborar, esto es, a las 15:00 horas (hora del centro del país). En sí, éste último valor reportado no indica mucho acerca de la evolución que tuvo el índice a lo largo de toda la jornada. Su valor cobra importancia cuando se compara con los resultados del día anterior al actual, esto es, calculando el retorno del día t con respecto al día $t - 1$ de la siguiente forma:

$$R_t = \frac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}}. \quad (2.2)$$

Se compara siempre el valor del índice al día t con el día hábil inmediato anterior. Con este valor, ya es más plausible poder hacer interpretaciones acerca de lo que se informa de manera diaria en la prensa, pues los porcentajes son índices libres de escala y de representación muy intuitiva de lo que está sucediendo con el indicador. Se considera que cuando el valor del log retorno excede un 5% del valor del log retorno inmediato anterior, ya sea un exceso positivo (boom) o negativo (crack), es alarmante.

Los log retornos r_t son calculados de acuerdo con la siguiente relación: $r_t = \ln(1 + R_t)$. Para este trabajo, se considera el estudio de los log retornos r_t , debido a las grandes ventajas y propiedades estadísticas que poseen, así como la mayor generalización de su uso en estudios de series financieras.

2.1. Propiedades empíricas de los retornos y la volatilidad

El modelado de las series de tiempo financieras es un problema complejo, principalmente debido a las características estadísticas que presentan (*stylized facts*), las cuales son comunes para la gran mayoría de este tipo de series. Tales características son ampliamente documentadas en la literatura correspondiente y se enuncian a continuación:

Reversión a la media. Es el regreso al valor medio de la serie a largo plazo.

Ausencia de autocorrelación en las series de los precios. Cuando se grafican las funciones de autocorrelación de las series de precios originales, éstos parecen no estar autocorrelacionados, similar a un ruido blanco.

Autocorrelación en las series de los retornos al cuadrado. Cuando se grafican las series de autocorrelación de los retornos de las series de precios elevados al cuadrado (r_t^2) o incluso los valores absolutos de los retornos, parecen tener fuertes niveles de autocorrelación.

Agrupamiento de la volatilidad. Los valores absolutos grandes de la serie de los log retornos tienden a aparecer agrupados. Períodos muy turbulentos (alta volatilidad) suelen estar seguidos de períodos muy tranquilos (baja volatilidad). Éstos períodos son recurrentes pero no aparecen de forma periódica.

Exceso de curtosis. Al graficar la densidad empírica de los retornos se aprecia que la gráfica generalmente no presenta las características propias de la densidad normal estándar. Al calcular el coeficiente de kurtosis, éstos tienden a tener valores más altos que tres, nivel de referencia para la distribución normal estándar.

Efecto de apalancamiento. Se refiere a los efectos de asimetría que se observan por el impacto de los valores negativos y positivos de los retornos en la volatilidad.

Estacionalidad. Debido a que los precios de las series financieras están determinados por los momentos que atraviesa la economía, ciertas fechas pueden tener efectos muy fuertes sobre los mismos como la cercanía de los fines de semana, vacaciones o días festivos. Por ejemplo, los períodos de transición política, elecciones, siempre generan un incremento en la volatilidad.

De aquí en adelante se entenderá a la volatilidad como la desviación estándar condicional de una serie de tiempo (σ_t), en particular, de la serie de los log retornos del IPyC.

El estudio de la volatilidad es un tema importante en finanzas. En estadística, modelar la volatilidad de una serie de tiempo puede mejorar la eficiencia en la estimación de los parámetros y la exactitud en un intervalo de pronósticos. Una característica especial de la volatilidad es que es un proceso no observable. Esto mismo, provoca que sea muy complicado evaluar la exactitud de los pronósticos de los modelos desarrollados para éste tipo de procesos, sin embargo, con base en las características antes mencionadas, se ha tratado de que los modelos reflejen los mismos comportamientos, lo que ha llevado a diversas variantes para tratar de captar todos los efectos posibles que presentan las series financieras.

3. Modelos de heterocedasticidad condicional

Para el presente trabajo se utilizó el modelo GARCH y una variante del mismo, el modelo EGARCH, los cuales fueron evaluados en diversos órdenes (retardos de las componentes) y en distintas características para seleccionar uno de ellos como mejor modelo. En Argáez et al (2014) se describen los modelos originales y las variantes que han sido mayormente empleadas en las series de datos de las áreas de economía y finanzas, mencionando sus características principales y algunas de sus aplicaciones. En este artículo se considerará para todos los modelos comparados que el componente aleatorio lleva una distribución normal estándar.

3.1. El modelo GARCH

El modelo GARCH fue propuesto por Bollerslev (1986) y se define de la siguiente manera, sea X_t un proceso estocástico de valores reales en tiempo discreto y \mathcal{F}_{t-1} el conjunto de información (σ -álgebra) de toda la información a través del tiempo t . El proceso $GARCH(p, q)$ es entonces dado por las ecuaciones

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (3.1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2, \quad (3.2)$$

donde $q > 0, p \geq 0, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, q$ y $\beta_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, p$. ε_t es una secuencia de variables aleatorias i.i.d. con media cero y varianza unitaria (generalmente la literatura maneja a ésta variable aleatoria con una distribución normal estándar, por lo que en este caso se tomará de igual forma). Otra restricción que se pone a los parámetros es

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1,$$

para garantizar que la varianza no condicional de X_t sea finita, a diferencia de la varianza condicional σ_t^2 que evoluciona a través del tiempo.

Los pronósticos de un modelo GARCH pueden obtenerse de manera similar a los de un modelo ARMA. Considérese el modelo GARCH(1,1) y asúmase que el origen del pronóstico es el tiempo h . Para el pronóstico en l pasos en el tiempo futuro se tiene que

$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(l-1) \quad l > 1, \quad (3.3)$$

donde l es la cantidad de pasos a futuro donde se desea conocer el valor de σ_t^2 . Haciendo sustituciones repetidas, se puede expresar a $\sigma_h^2(l)$ en términos del primer pronóstico

$$\sigma_h^2(l) = \frac{\alpha_0[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1}]}{1 - \alpha_1 - \beta_1} + (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1}\sigma_h^2(1), \quad (3.4)$$

de donde se puede deducir que

$$\sigma_h^2(l) \rightarrow \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \quad \text{tanto como } l \rightarrow \infty,$$

siempre y cuando se cumpla que $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Consecuentemente, el pronóstico en varios pasos simultáneos hacia adelante de un modelo GARCH(1,1) converge a la varianza no condicional de X_t^2 cuando el horizonte de pronóstico tiende a infinito, siempre y cuando la $Var(X_t)$ exista ([Tsay, 1984]).

3.2. El modelo EGARCH

Para solventar algunas debilidades del modelo GARCH cuando se ajusta series financieras, Nelson (1991), propuso el modelo GARCH exponencial (EGARCH). En particular, el modelo captura los efectos asimétricos positivos y negativos entre los retornos de activos financieros por medio de una función de las innovaciones de la forma:

$$g(\varepsilon_t) = \alpha\varepsilon_t + \gamma[|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)],$$

donde α y γ son ambos valores reales. Ambos ε_t y $|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)$ son secuencias independientes idénticamente distribuidas con media cero y distribuciones continuas, por tanto, $E[g(\varepsilon_t)] = 0$. La asimetría de $g(\varepsilon_t)$ puede ser reescrita como

$$g(\varepsilon_t) = \begin{cases} (\alpha + \gamma)\varepsilon_t - \gamma E[|\varepsilon_t|] & \text{si } \varepsilon_t \geq 0 \\ (\alpha - \gamma)\varepsilon_t - \gamma E[|\varepsilon_t|] & \text{si } \varepsilon_t < 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Cuando ε_t se distribuye normal estándar, $E[|\varepsilon_t|] = \sqrt{2/\pi}$. Un modelo *EGARCH*(p, q) puede escribirse como

$$X_t = \varepsilon_t\sigma_t \quad (3.6)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i\varepsilon_{t-i} + \gamma_i[|\varepsilon_{t-i}| - E(|\varepsilon_{t-i}|)]) + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2), \quad (3.7)$$

donde α_0 es una constante, ε_i es el ruido de la serie, α_i el coeficiente que captura el signo de la innovación y γ_i el coeficiente que captura la magnitud de la innovación.

En este modelo el valor de la varianza no condicional $Var(X_t)$, es

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^p \beta_j}.$$

Ya que las innovaciones negativas tienden a tener efectos mayores que las positivas, se espera en la práctica que el valor de γ_i sea negativo. Este modelo se diferencia del GARCH usual en diversas formas. Primero, usa un valor de varianza condicional aplicada por un logaritmo para relajar las condiciones de positividad en los parámetros del modelo. Segundo, usa una función $g(\varepsilon_t)$ que permite al modelo responder de forma distinta a las innovaciones positivas y negativas lo que da como resultado la captación de asimetría de la serie de los retornos.

Entre las principales observaciones que se pueden hacer al modelo están las siguientes:

1. La relación

$$\sigma_t^2 = e^{\alpha_0} \prod_{i=1}^q \exp\{g(\varepsilon_{t-i})\} \prod_{j=1}^p (\sigma_{t-j}^2)^{\beta_j}$$

muestra que, en contraste con el modelo GARCH estándar, la volatilidad tiene una dinámica multiplicativa. Las limitantes de positividad sobre los coeficientes pueden ahora ignorarse ya que el logaritmo puede tomar ambos signos.

2. De acuerdo a las interpretaciones usuales, valores grandes en módulo deben aumentar la volatilidad. Esto genera algunas limitantes sobre los coeficientes, que para el caso general, basta con que

$$-\gamma_i < \alpha_i < \gamma_i \quad \alpha_i \geq 0 \quad \beta_j \geq 0.$$

3. La propiedad de asimetría es tomada a través del coeficiente α_i .
4. La varianza condicional es escrita como una función de las innovaciones estandarizadas pasadas (esto es, divididas por su desviación estándar condicional).

En el caso del modelo EGARCH(1,1) los pronósticos están dados por la siguiente expresión

$$\sigma_h^2(j) = \hat{\sigma}_h^{2\beta_1}(j-1) \exp[\alpha_0] \exp(-\gamma_1 \sqrt{2/\pi}) [e^{[(\alpha_1+\gamma_1)^2/2]} \Phi(\alpha_1 + \gamma_1) + e^{[(\alpha_1-\gamma_1)^2/2]} \Phi(\gamma_1 - \alpha_1)], \quad (3.8)$$

donde $j > 0$ y Φ es la función de distribución acumulada de la normal estándar. Además $E_h[\sigma_{h+j}^2] = \hat{\sigma}_h^2(j)$ donde

$$E_h[\sigma_{h+j}^2] = E[\sigma_{h+j}^{2\beta_1}] \exp[\alpha_0] E_h\{\exp[g(\varepsilon_{h+j})]\},$$

donde E_h denota la esperanza condicionada a la información pasada de la serie al momento de origen h . La esperanza de $\exp(g(\varepsilon_{h+1}))$ puede calcularse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} E[\exp(g(\varepsilon))] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha_1 \varepsilon + \gamma_1 (|\varepsilon| - \sqrt{2/\pi})) f(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= \exp(-\gamma_1 \sqrt{2/\pi}) \left[\int_0^{\infty} e^{(\alpha_1+\gamma_1)\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon^2/2} d\varepsilon + \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha_1-\gamma_1)\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon^2/2} d\varepsilon \right] \\ &= \exp(-\gamma_1 \sqrt{2/\pi}) [e^{[(\alpha_1+\gamma_1)^2/2]} \Phi(\alpha_1 + \gamma_1) + e^{[(\alpha_1-\gamma_1)^2/2]} \Phi(\gamma_1 - \alpha_1)], \end{aligned}$$

ya que las variables ε_t son independientes entre sí para toda t .

4. Metodología

En ésta sección se presenta la metodología a utilizar para el presente trabajo. Los pasos a seguir y las recomendaciones mencionadas para la construcción del modelo están basadas en los criterios que sugiere Tsay (1984). Para el ajuste a la serie de los log retornos se usa la teoría desarrollada en el libro de Francq y Zakoïan (2010) de la estimación del proceso ARMA-GARCH y la validación del modelo.

4.1. Construcción del modelo

Construir un modelo de volatilidad para el retorno de un activo consta de cuatro etapas:

1. Especificar una ecuación media para probar la dependencia serial de los datos y, si es necesario, construir un modelo econométrico, tal como un modelo ARMA, para la serie de los retornos y remover cualquier dependencia lineal.
2. Usar los residuales de la ecuación media para probar la existencia del efecto ARCH.
3. Si el efecto ARCH resulta estadísticamente significativo, especificar un modelo de volatilidad y aplicar un método de estimación conjunta de las ecuaciones de la media y de la volatilidad.
4. Revisar el modelo ajustado y de no ser adecuado, postular otro modelo si es necesario.

La ecuación para la media μ_t debe de ser simple (menor cantidad de parámetros a estimar en la medida de lo posible), y se asumirá que r_t sigue un modelo de serie de tiempo simple tal como un modelo $ARMA(p, q)$ estacionario con algunas variables explicativas. En otras palabras, el modelo debe ser de la forma

$$r_t = \mu_t + X_t, \quad \mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^k \eta_i y_{it} + \sum_{j=1}^P \phi_j r_{t-j} - \sum_{m=1}^Q \theta_m X_{t-m}, \quad (4.1)$$

donde k , P y Q son enteros no negativos y las variables y_{it} son variables explicativas, ϕ_j , η_i y θ_m son los parámetros del modelo donde $j = 0, 1, \dots, P$, $i = 1, 2, \dots, k$, $m = 1, 2, \dots, Q$ son valores reales constantes. La serie X_t^2 es usada para probar la existencia de heterocedasticidad condicional, la cual es también conocida como el efecto ARCH. En caso de determinarse la existencia del efecto ARCH en la serie, X_t podría seguir un proceso de tipo GARCH o EGARCH. Asimismo, por simplicidad, no se considerará alguna variable explicativa extra y_{it} para el modelo.

4.2. Comparación de los modelos

Para verificar las bondades que provee cada modelo en relación a otro, se propone comparar las siguientes características en ambos:

- Captación de la volatilidad.
- Especificación correcta del modelo (variables explicatorias necesarias).
- Comparación de ajuste (medidas de error, criterios de información).
- Estabilidad del modelo (parámetros).

Para llevar a cabo lo anterior, se han propuesto varias pruebas estadísticas que arrojen información acerca de las hipótesis correspondientes para cada caso. De manera particular, se ha elegido utilizar la curva de nuevos impactos para inspeccionar de manera gráfica la captación de la volatilidad, así como las pruebas del signo del sesgo (*sign bias test*), la prueba Ljung-Box y la prueba de estabilidad de Nyblom como pruebas analíticas, además de los valores correspondientes de los criterios de información (*AIC*, *BIC*) junto con las medidas de error aplicables (*RMSE*, *MAE*).



Figura 1: Gráfico de la serie histórica de los valores del IPyC de la muestra.

5. Ajuste, comparación y evaluación de los modelos

En ésta sección se muestra el desarrollo y los resultados de la aplicación de los métodos presentados en secciones anteriores al índice de precios y cotizaciones. Toda la metodología es aplicada con el software estadístico **R** (R Development Core Team, 2012). En primera instancia se describe la muestra tomada y las especificaciones que se tendrá para trabajar con ella, seguidamente, se hace el ajuste de los modelos. Más adelante se procede a hacer la comparación entre éstos últimos y finalmente se hace una evaluación de la capacidad predictiva de éstos.

La muestra utilizada tiene valores diarios registrados del IPyC que van del día 3 de Enero del 2000 al 1 de Febrero del 2013, esto es, un total de 3297 datos, considerando únicamente los días hábiles que tuvo la Bolsa Mexicana de Valores, que son precisamente aquellos cuando el IPyC tiene actividad registrada. La gráfica de la muestra puede verse en la figura 1. Esta muestra se dividió en dos partes para su estudio: la primera ($r_t^{(1)}$) que va del 3 de enero del 2000 al 31 de diciembre del 2010 (2770 datos) y la segunda ($r_t^{(2)}$), que es el restante de la muestra, va del 3 de enero del 2011 hasta el 1 de febrero del 2013 (527 datos). Esto con el fin de utilizar la primera parte para medir el ajuste que tienen los modelos y la segunda para evaluar la capacidad predictiva de los mismos, tal como en los trabajos de Aragonés y Blanco (1996), Çifter y Özun (2007) y Abdalla et al. (2012), entre otros.

	Sesgo	Kurtosis
Valor	0.04459359	4.177939

Tabla 1: Sesgo y kurtosis muestrales de la serie $r_t^{(1)}$.

Se calculó la serie de los log retornos y se graficó el resultado y por medio de la inspección visual se comprobaron las características usuales de las series financieras (la existencia de clústers, reversión a la media, exceso de kurtosis, asimetría) tal como se aprecia en la figura 2, donde se observa la serie de los log retornos junto con el autocorrelograma (acf) de esta misma serie y el acf de la serie al cuadrado. El primer acf muestra únicamente al primer retardo de la serie como significativo (sobresale de las bandas de confianza) sin ninguna tendencia aparente, contrario al segundo acf que claramente presenta una tendencia en los retardos donde todos se muestran significativos, mismo fenómeno que se observa en los autocorrelogramas parciales de la serie (figura 3), indicativo de la posible presencia del efecto ARCH. En la tabla 1 se muestran los coeficientes muestrales para la asimetría y la kurtosis en donde ambos índices indican valores distintos de los que se presentan en variables con distribución normal estándar. En la construcción del modelo, para el

ajuste de la ecuación media condicional, se proponen tres modelos: ARMA(1,1), AR(1) y un MA(1), con el objetivo de realizar las comparaciones de ajuste conjunto con los modelos de varianza condicional. Los resultados de los ajustes se encuentran en la tabla 2.

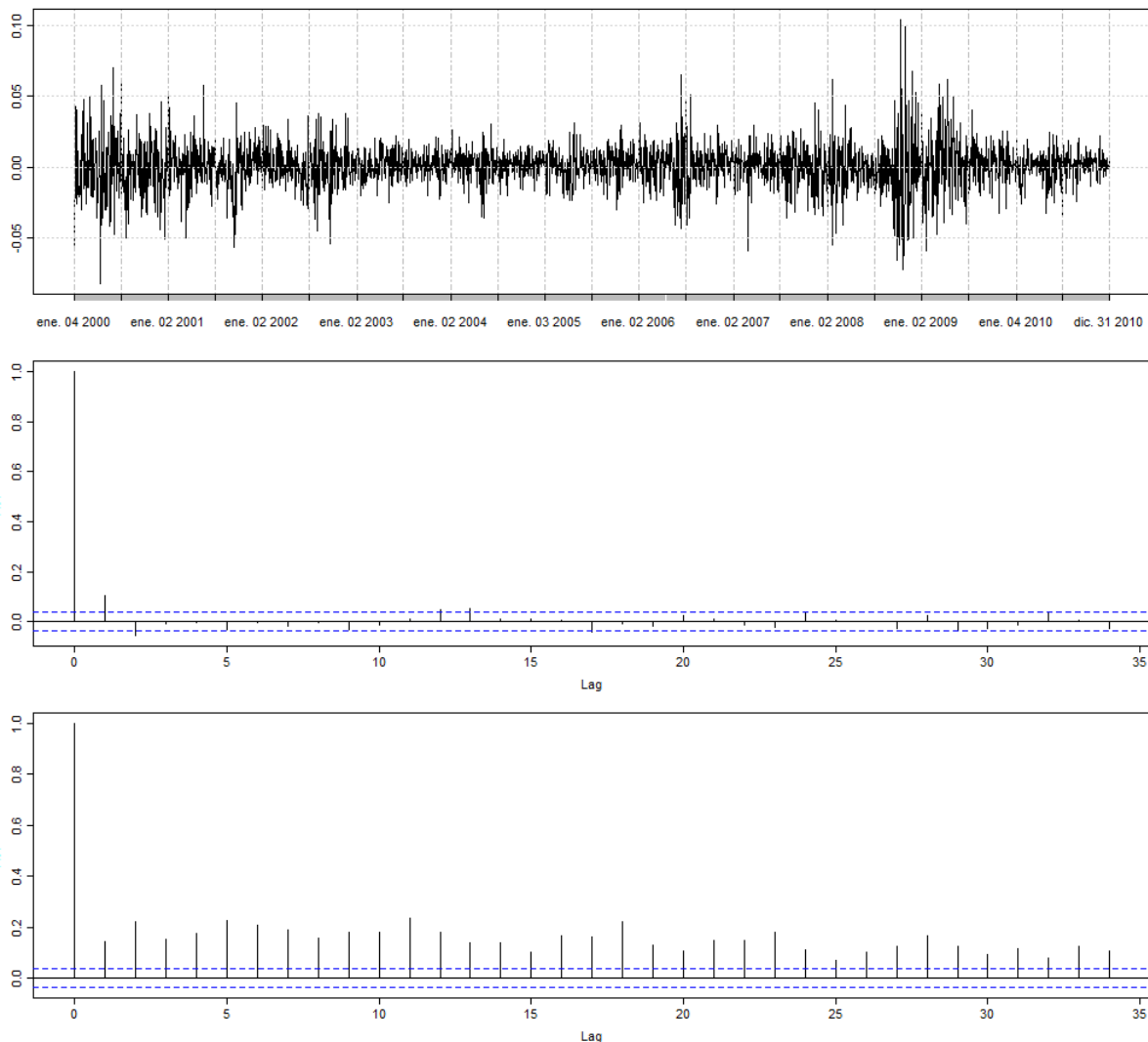


Figura 2: Serie de los log retornos $r_t^{(1)}$ junto con el autocorrelograma de la serie y de la serie al cuadrado.

De la tabla se observa que todos los modelos son significativos (con todos los p valores de cada parámetro por sobre el nivel de significancia α), con valores AIC muy cercanos entre sí, lo que considerando la cantidad de parámetros en cada modelo ajustado, indicaría valores de verosimilitud muy similares. La idea de proponer tres modelos para la media condicional es debido a que inicialmente se desconoce con cuál de éstos modelos, en conjunto con el ajuste de un modelo de heterocedasticidad, podrá reflejar mejor las características que presenta la serie en cuestión. Cabe recordar que una de las recomendaciones al ajustar éste tipo de modelos es tener la menor cantidad de parámetros posible.

Desde la inspección visual de la serie de los log retornos, se anticipa que la serie presenta las características usuales de las series financieras, por lo que se prevee que las pruebas para verificar el efecto ARCH no rechacen ésta hipótesis, como la agrupación de la volatilidad, de manera concreta en los períodos cercanos al mes de julio de 2006 (período de elecciones federales) y en la segunda mitad del año 2008 (efectos de la crisis inmobiliaria de estados unidos); así como indicios de la reversión a la media, donde en la gráfica se observa que el valor medio de la serie parece mantenerse constante. Los resultados de la prueba Ljung-Box sobre la serie $r_t^{(1)}$ se presentan en la tabla 3, donde se puede apreciar que los todos los p valores estimados son

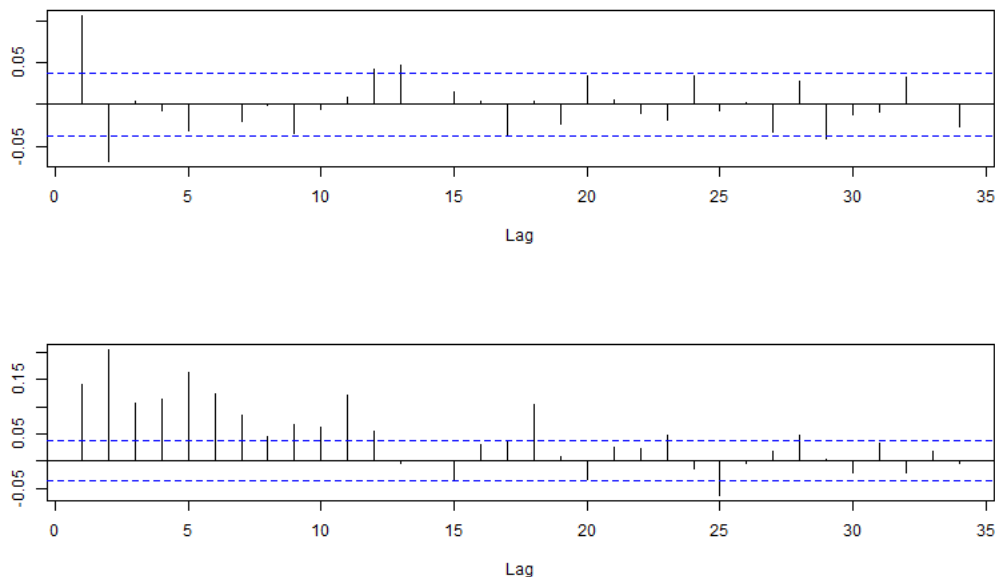


Figura 3: Autocorrelograma parcial de la serie $r_t^{(1)}$ y de la serie al cuadrado.

Modelo	Parámetro	Estimación	Error Estándar	Valor t	Pr(> t)
ARMA(1,1) AIC = -15462.99	ar1	-0.2860263	0.0909816	-3.144	0.00167 **
	ma1	0.4063965	0.0865862	4.694	2.69e-06 ***
	intercepto	0.0008084	0.0003992	2.025	0.04284 *
AR(1) AIC = -15452.06	ar1	0.1059263	0.0188470	5.620	1.91e-08 ***
	intercepto	0.0005679	0.0002821	2.013	0.0441 *
MA(1) AIC = -15457.55	ma1	0.1228283	0.0199770	6.148	7.82e-10 ***
	intercepto	0.0006358	0.0003162	2.011	0.0443 *

Tabla 2: Estimación de los modelos para la media condicional (* $p < 0.05$, ** $p < 0.01$, *** $p < 0.0001$).

pequeños. Los resultados indican que, independientemente del modelo elegido, todas las series de residuales presentan una autocorrelación de sus valores al cuadrado de manera significativa, indicio de existencia del efecto ARCH. De acuerdo a la metodología propuesta, el siguiente paso es ajustar un modelo de varianza condicional para captar correctamente las características de la serie.

Lag	ARMA(1,1)	AR(1)	MA(1)
5	$p < 1 \times 10^{-6}$	$p < 1 \times 10^{-7}$	$p < 1 \times 10^{-7}$
10	$p < 1 \times 10^{-6}$	$p < 1 \times 10^{-7}$	$p < 1 \times 10^{-7}$
15	$p < 1 \times 10^{-6}$	$p < 1 \times 10^{-7}$	$p < 1 \times 10^{-7}$
20	$p < 1 \times 10^{-6}$	$p < 1 \times 10^{-7}$	$p < 1 \times 10^{-7}$

Tabla 3: p valores asociados a la prueba del efecto ARCH para los residuales de los modelos ajustados.

A continuación se procedió a la estimación de los parámetros del modelo de la media condicional en conjunto con los del modelo GARCH. Para ello, se probaron tres órdenes del modelo y los resultados de las estimaciones conjuntas se presentan en la tabla 4. Los modelos en los cuales los parámetros en conjunto no fueron significativos (con alguno de los parámetros estimados con un p valor mayor al nivel α de significancia considerado) se marcan con una X, mientras que los modelos que si resultaron significativos (los p valores de los parámetros menores a 0.05) se muestran con su valor AIC como apoyo en la selección del un mejor modelo. El hecho de que éstos valores se encuentren tan cercanos entre sí puede indicar que no existe mucha

diferencia entre la información que se pierde por ajuste de un modelo a otro.

Media-Ruido	GARCH(1,1)	GARCH(2,1)	GARCH(1,2)
ARMA(1,1)	X	X	X
MA(1)	-5.8469	X	X
AR(1)	-5.8407	-5.8639	X

Tabla 4: Ajuste de los modelos de la media condicional-GARCH.

Los resultados muestran que el modelo ARMA(1,1) no pudo ajustarse significativamente en ninguno de los casos con el modelo GARCH. A diferencia de éste, los modelos AR(1) y MA(1) se pudieron integrar correctamente con éste, incluso hasta de un orden superior en el caso del modelo AR(1), dando como resultado tres propuestas para la serie de los log retornos del IPyC. Se procedió asimismo, a realizar las estimaciones conjuntas de los mismos modelos para la media condicional junto con el modelo EGARCH en los mismos órdenes que fue estimado el modelo GARCH y los resultados se muestran de manera análoga en la tabla 5. En este caso, los resultados muestran que bastó solo los primeros órdenes de los parámetros para que el modelo se ajustara de manera significativa. Cabe recalcar incluso, que los valores AIC obtenidos para cada combinación de los modelos tiene un valor similar a los otros.

En general, tanto el modelo GARCH como el EGARCH solamente necesitaron los primeros órdenes para tener resultados estadísticamente significativos, lo que resulta ventajoso ya que no se necesitan grandes cantidades de parámetros a estimar y resalta la gran capacidad que tienen para ajustarse a las características de la serie financiera. Esto es un hecho bastante común en la literatura correspondiente a estos modelos. Para el caso de las ecuaciones de las medias condicionales, los trabajos revisados muestran que en general, basta con un modelo AR(1) para ajustar las series de los log retornos estudiadas, sin embargo, en todos estos casos las series estudiadas fueron de una temporalidad menor e índices financieros distintos al estudiado en este caso, razón por la cual en el presente trabajo, se propuso tres modelos distintos para el modelo de la ecuación media.

Media-Ruido	EGARCH(1,1)	EGARCH(2,1)	EGARCH(1,2)
ARMA(1,1)	-5.8805	X	X
MA(1)	-5.8808	X	X
AR(1)	-5.8805	X	X

Tabla 5: Ajuste de los modelos de la media condicional - EGARCH.

Una vez obtenidos los seis modelos posibles, se realizó la comparación entre los mismos con una serie de pruebas estadísticas y gráficas que validen la captación de las distintas características de la serie de los log retornos del IPyC. En adelante para las figuras y tablas se manejará la siguiente notación:

Mod 1 AR(1)-GARCH(1,1)

Mod 2 AR(1)-GARCH(2,1)

Mod 3 MA(1)-GARCH(1,1)

Mod 4 ARMA(1,1)-EGARCH(1,1)

Mod 5 AR(1)-EGARCH(1,1)

Mod 6 MA(1)-EGARCH(1,1)

Primero se evaluó captación de la asimetría que presenta la serie de los log retornos debido al signo de las innovaciones de forma gráfica en cada uno de los modelos por medio de las curvas de nuevos impactos. Lo que éstas curvas representan es cómo el modelo es afectado cuando se tiene nueva información en la serie, considerando tanto por el tamaño del impacto como el signo del mismo. En la figura 4 pueden observarse las distintas curvas de nuevos impactos para cada modelo ajustado.

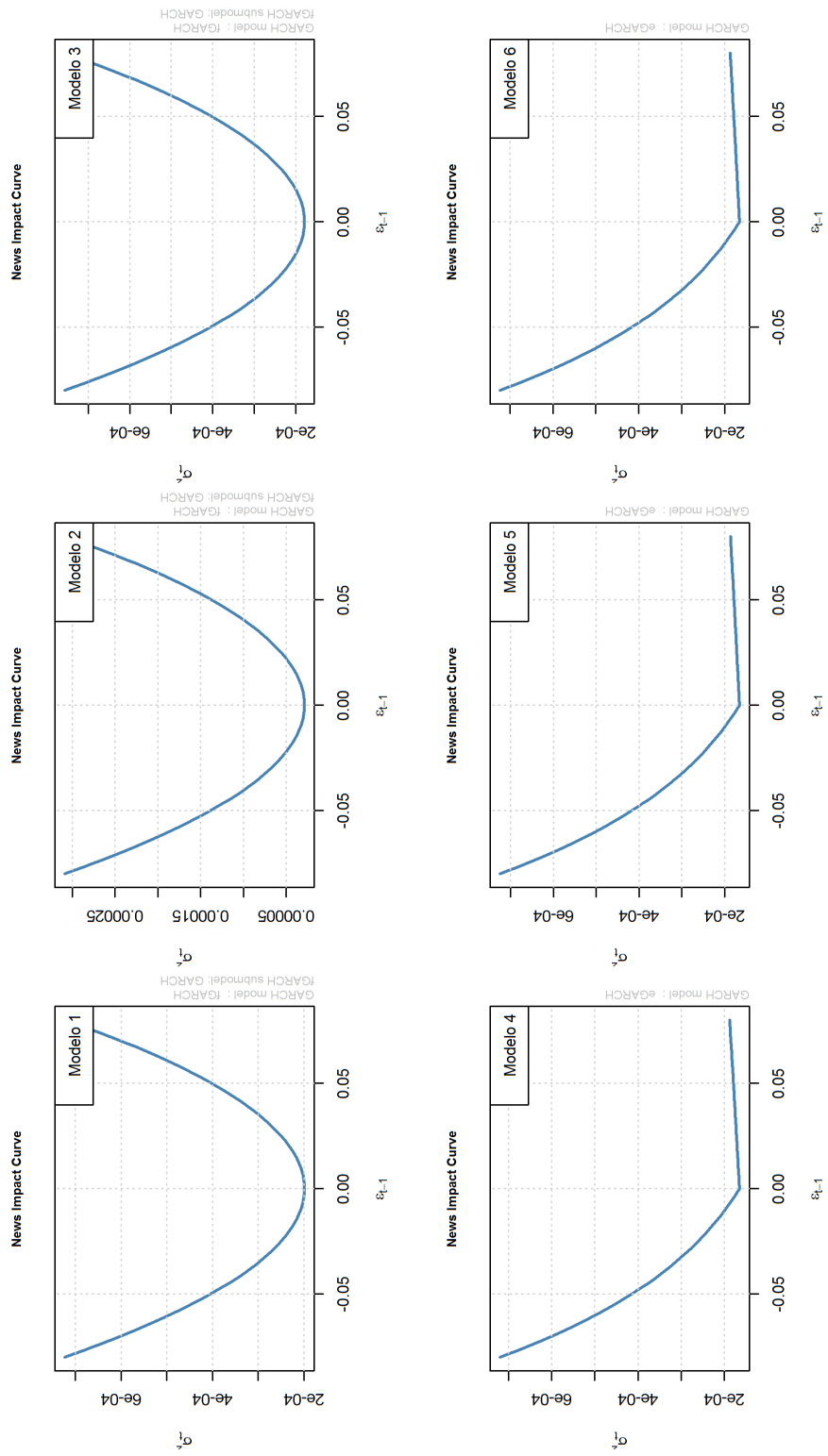


Figura 4: Curvas de nuevos impactos para los modelos ajustados.

Prueba	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 4	Mod 5	Mod 6
Signo del Sesgo	0.2391	.0093	0.2275	0.1361	0.1968	0.1920
Sesgo Negativo	0.2173	.0156	0.2034	0.5804	0.6311	0.6325
Sesgo Positivo	0.0569	.0108	0.0631	0.3679	0.3533	0.3467
Efecto conjunto	0.0001	.0000	0.0001	0.0982	0.1446	0.1362

Tabla 6: p valores obtenidos para los modelos respectivos en la prueba del signo del sesgo ($\alpha=0.05$).

En los casos donde se ajustaron modelos tipo GARCH las curvas muestran un comportamiento simétrico, indicando que es indistinto del signo del nuevo dato y que incrementa de igual manera en proporción α_1 la varianza condicional. Por otro lado, los modelos donde se ajustó un modelo tipo EGARCH muestran una mayor sensibilidad al signo del nuevo impacto, dando mayor importancia a los incrementos de precios negativos en la serie, incrementando la varianza condicional en mayor proporción que cuando se tienen impactos positivos, lo que es más cercano al comportamiento de la economía en la realidad, la volatilidad incrementa cuando existe incertidumbre en los rendimientos de algún activo en el mercado. Analíticamente esto puede demostrarse mediante la prueba del signo del sesgo (*Sign Bias Test*). En este caso, la hipótesis nula es H_0 : El modelo está correctamente especificado contra la hipótesis alternativa H_1 : El modelo no está correctamente especificado. En el caso de los primeros tres modelos, los p valores en la tabla 6 indican que no se puede rechazar la hipótesis nula en los casos cuando se miden los efectos de forma separada. Sin embargo, cuando se toman todos los efectos en conjunto, los p valores indican claramente que el modelo no está especificado correctamente para ninguno de los modelos con ruido tipo GARCH. Análogamente, para los modelos 4, 5 y 6 los p valores resultantes de la prueba del signo del sesgo muestran que no se puede rechazar la hipótesis nula para ninguno de los casos, ya fuese midiendo efectos por individual en cada modelo o en conjunto, indicando una buena captación de las características de la serie por los respectivos modelos.

De igual manera, se revisó si quedó algún efecto de correlación entre los residuos del modelo, así como si el efecto ARCH fue removido correctamente mediante la prueba Ljung-Box aplicada a la serie de los nuevos residuales $x_t^{(1)}$ y los nuevos residuales al cuadrado $(x_t^{(1)})^2$. Los p valores correspondientes a esta prueba en cada serie se muestran en la tabla 7 para todos los modelos ajustados. Primero se muestran los resultados para la serie $x_t^{(1)}$ en los retardos 1, $P + Q + 1$ y $P + Q + 5$, donde P y Q son los retardos de las ecuaciones medias correspondientes. En el caso de los residuales al cuadrado, se evaluó sobre los retardos 1, $p + q + 1$ y $p + q + 5$, donde p y q son los retardos de los modelos de varianza condicional correspondientes a cada modelo. Para la serie $x_t^{(1)}$ la prueba Ljung-Box indica que estadísticamente, no existe correlación lineal entre éstos datos, excepto en el segundo retardo para los modelos ajustados con un modelo AR(1). En el caso de los residuales al cuadrado, la prueba indica en todos los casos que el efecto ARCH fue removido en cada uno de los retardos evaluados.

Serie $\{x_t^{(1)}\}$	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 4	Mod 5	Mod 6
1	0.18510	0.56273	0.2767	0.5720	0.4818	0.5761
P+Q+1	0.04499	0.04564	0.1125	0.3049	0.0224	0.0636
P+Q+5	0.24129	0.26295	0.3886	0.5994	0.1690	0.3051
Serie $\{(x_t^{(1)})^2\}$	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 4	Mod 5	Mod 6
1	0.6282	0.4398	0.6357	0.7332	0.7551	0.7450
p+q+1	0.5622	0.2176	0.5629	0.7003	0.7336	0.7198
p+q+5	0.9760	0.8142	0.9771	0.8604	0.8404	0.8434

Tabla 7: p valores asociados a la prueba Ljung-Box sobre la serie de los residuales y los residuales al cuadrado de los modelos ajustados con ruidos tipo GARCH y EGARCH ($\alpha = 0.05$).

El siguiente paso fue evaluar el ajuste de cada uno de los modelos a la serie de los log retornos. Se utilizaron las medidas de error MAE y RMSE así como los criterios de información AIC y BIC para la selección de un mejor modelo y los mismos se muestran en la tabla 8. Para el criterio de información AIC, los valores obtenidos no distan mucho unos de otros, siendo más cercanos, y más pequeños, los obtenidos por los modelos ajustados con un ruido tipo EGARCH. En el caso del BIC, los resultados son un poco más distantes, sin embargo, siguen siendo los modelos ajustados con un ruido tipo EGARCH los que se

Modelo	AIC	BIC	RMSE	MAE
Mod 1	-5.8407	-5.8300	0.01488382	0.01048567
Mod 2	-5.8693	-5.8565	0.01487207	0.01049350
Mod 3	-5.8469	-5.8362	0.01487558	0.01048130
Mod 4	-5.8805	-5.8655	0.01485175	0.01048243
Mod 5	-5.8805	-5.8676	0.01487293	0.01049238
Mod 6	-5.8808	-5.8680	0.01486435	0.01048819

Tabla 8: Criterios de información y medidas de error de los modelos seleccionados.

encuentran más a la izquierda en la recta de los números reales. En ambos casos, el modelo que posee el valor mínimo de ambos criterios es el 6. En cuanto a las medidas de error, se tienen valores muy cercanos, al grado de no diferenciarse uno de otro hasta el quinto dígito después del punto decimal, lo que indica muy poca diferencia en ajuste uno de otro. Sin embargo, debido a que las medidas calculadas son dependientes de la escala, es difícil decir en qué medida una ajuste es mejor que otro debido a que los retornos tienen valores muy cercanos al cero. Es precisamente por esta razón que tampoco fue posible el cálculo del MAPE. Los modelos con errores más pequeños fueron el modelo 4 y el modelo 3 para el RMSE y el MAE respectivamente.

El siguiente paso fue probar la estabilidad del modelo con la prueba de Nyblom. La prueba indica si los parámetros son sensibles a cambios a lo largo del tiempo, en cuyo caso, el modelo no sería apto para realizar pronósticos confiables. Los resultados de aplicar la prueba a los modelos ajustados se muestran en la tabla 9. Se tienen dos niveles de valores críticos para cada modelo ajustado, individual y conjunto. Debido a la cantidad de parámetros ajustados para éstos modelos es recomendable tomar únicamente de referencia el valor crítico conjunto. De acuerdo a esto, cuando el valor estimado es mayor que el crítico se rechaza la hipótesis nula (los parámetros son estables a lo largo del tiempo). Los valores obtenidos muestran que únicamente en los modelos ajustados con ruidos tipo EGARCH no es posible rechazar la hipótesis nula, mientras que los modelos ajustados con ruidos GARH, la evidencia estadística muestra que los mismos no son capaces de ofrecer pronósticos confiables, al nivel de significancia del 0.05

	Mod. 1	Mod. 2	Mod. 3	Mod. 4	Mod. 5	Mod. 6
mu	0.1097	0.09549	0.1030	0.1099	0.1177	0.1188
ar1	0.4413	0.52098	-	0.5757	0.4634	-
ma1	-	-	0.5372	0.5837	-	0.5372
omega	1.9820	1.40820	1.9124	0.1710	0.1684	0.1693
alpha1	0.1469	0.15300	0.1489	0.3368	0.3628	0.3551
alpha2	-	0.20805	-	-	-	-
beta1	0.1989	0.20956	0.2023	0.1681	0.1654	0.1664
gamma1	-	-	-	0.2170	0.1911	0.1994
Conj.	16.4056	5.765	16.0406	1.5962	1.4079	1.4864
Ind.	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47
Conj.	1.47	1.68	1.47	1.9	1.68	1.68

Tabla 9: Prueba de Nyblom de estabilidad de los parámetros para los modelos seleccionados. Los valores de las dos últimas filas son los valores críticos individuales (Ind.) y en conjunto (Conj.).

Finalmente se evaluó la capacidad predictiva de los modelos ajustados. Para esto, se usaron las medidas de error RMSE y MAE sobre la serie $r_t^{(2)}$ y la serie de los pronósticos para cada modelo respectivo. Los pronósticos se calcularon de acuerdo a las fórmulas (3.4) y (3.8), calculando un paso hacia adelante $t + 1$ a partir del momento t y posteriormente volverlo parte de la serie ajustada para calcular el punto $t + 2$ a partir del punto $t + 1$. Los resultados se muestran en la tabla 10. Los valores obtenidos indican diferencias muy pequeñas entre los modelos; sin embargo, se tiene el mismo problema que cuando se realizaron anteriormente ya que éstas medidas son dependientes de la escala de la variable en estudio, por lo que no es posible saber con precisión (o al menos con algún grado de referencia) cuál es la diferencia relativa entre los errores obtenidos. En el caso del RMSE, los modelos 5 y 6 fueron los que presentaron valores más pequeños en comparación con los demás. En el MAE, los modelos ajustados con ruidos tipo EGARCH fueron los más pequeños, guardando poca diferencia entre ellos. Cabe recalcar también que éstas medidas no son sensibles a ciertas características

Modelo	RMSE	MAE
Mod 1	0.01000107	0.007089756
Mod 2	0.01000295	0.007091363
Mod 3	0.01000989	0.007091106
Mod 4	0.01001308	0.007068358
Mod 5	0.00998080	0.007069841
Mod 6	0.00998869	0.007068388

Tabla 10: Medidas de error para las predicciones de los modelos seleccionados.

en la muestra como el sesgo o exceso de kurtosis, por lo que cuando existe evidencia de lo anterior éstas medidas son incapaces de reflejarlo. En este caso, se ha propuesto realizarlas debido a que siguen siendo medidas de información muy útiles a pesar de no ser tan precisas por su naturaleza al medir los errores.

6. Discusión y conclusiones

La evidencia obtenida de las diversas pruebas realizadas indica en general, que los modelos ajustados con ruidos de tipo EGARCH resultaron con un mejor comportamiento al ajustarse a las características de los log retornos del IPyC.

En cuanto a la metodología aplicada, Tsay (1984) en su propuesta de construcción del modelo no especifica los criterios a usarse para evaluar el correcto comportamiento del modelo. Efectivamente, debe revisarse en primera instancia que se cumplen los supuestos propios del modelo; sin embargo, en este trabajo se evaluaron además otras características como el error en el ajuste y la estabilidad de los parámetros para realizar pronósticos. Asimismo, Tsay parte de un modelo base, el cual se va refinando hasta obtener uno adecuado. Para el estudio se propusieron varios modelos de ecuación media junto con distintas combinaciones para los ruidos, lo que originó seis candidatos distintos de modelos y entre ellos se comparará cuál podría ser la combinación que mejor se adaptara al comportamiento de la serie. Como se vio, no hubo ningún modelo que fuera sobresaliente en todas y cada una de las pruebas, sino que dependiendo de la característica que se estuviera evaluando se veían las ventajas de unos u otros, siendo en forma general, el modelo EGARCH mejor que el GARCH. Cabe recalcar que los modelos solamente necesitaron los primeros órdenes para poder tener ajustes significativos a la serie en cuestión.

Distinto a lo encontrado por López (2004), Hernández (2011), Lorenzo y Ruíz (2011) y Durán y Lorenzo (2012), los modelos autorregresivos no fueron los mejores candidatos para modelar la ecuación media, ya que no captan completamente la estructura de dependencia subyacente en la serie trabajada, posiblemente por el tamaño de muestra que fue distinto para los trabajos anteriores, ya que en el presente se usó un período más largo, tanto para ajuste como para predicción; en vez de eso resultó más adecuado un modelo ARMA(1,1) de acuerdo a la evidencia ya mostrada. En cuanto a los modelos de volatilidad, se concuerda con todos, salvo con Durán y Lorenzo (2012) que concluyen con la conveniencia de utilizar siempre el modelo GARCH pero cambiando la distribución teórica para el ruido por una distribución normal sesgada; que el mejor modelo para ajustar a las características de la volatilidad en el IPyC es el modelo EGARCH(1,1).

Desafortunadamente no se pudo contar con mayor información que pudiera respaldar la elección de uno u otro modelo como mejor pronosticador. Esto es consistente con lo hallado por Robles (2002), que también afirma que hace faltan más medidas de información que pudieran ser base sólida para la elección de un predictor.

Finalmente concluimos, para la muestra utilizada, que los modelos ajustados con ruidos de tipo EGARCH fueron superiores a los modelos con ruidos GARCH tradicionales, tanto para ajuste como para predicción. Independientemente de la suposición para la distribución de los errores estandarizados, errónea según lo observado empíricamente, los modelos tuvieron desempeños muy buenos. Al realizar la construcción de un modelo de volatilidad, debe darse más importancia a la elección de la ecuación media, que en la literatura, pareciera ser en algún grado subestimada su importancia. En el presente trabajo el mejor modelo de ajuste resultó ser el ARMA(1,1)-EGARCH(1,1), seguido del MA(1)-EGARCH(1,1). La evaluación de los pronósticos

debe ser desarrollada en una forma más profunda, donde es muy probable que nuevamente, el mismo modelo para ajuste repitiera como mejor modelo predictor; pero las evidencias mostradas en el trabajo no son lo suficientemente sólidas para confirmarlo.

Referencias

- [Abdalla, Winter y Zakaria, 2012] Abdalla, S.; Winter, P.; Zakaria, S. (2012). Modelling stock market volatility using univariate GARCH models: evidence from Sudan and Egypt. *International Journal of economics and finance*. 4. Versión disponible en línea en la dirección: <http://dx.doi.org/10.5539/ijef.v4n8p161>.
- [Anderson y Burnham, 2004] Anderson, D. R.; Burnham, K. P. (1994) Multimodel inference: Understanding AIC and BIC in model selection. *Sociological methods research*. 33:261-304.
- [Aragones y Blanco, 1996] Aragonés González, J.; Blanco Viñas, C. (1996). Estimación de la volatilidad condicional en el mercado de divisas con modelos de la familia GARCH. *Investigaciones europeas de dirección y economía de la empresa*. 2:43-59.
- [ArgaezBatunGuerreroKantunPanti] Argáez Sosa, J.; Batún Cutz, J.; Guerrero Lara, E.; Kantún Chim, D.; Medina Peralta, S.; Pantí Trejo, H. (2014). Un paseo por el modelo GARCH y sus variantes. *Abstraction & Application*. 10: 35-50.
- [Benton, 2008] Benton, A. L. (2008). Do investors assess the credibility of campaign commitments? The case of Mexico's 2006 presidential race. *Political Research Quarterly*. 61:403-418.
- [Berger, 1985] Berger, James O. (1985). *Statistical decision theory and Bayesian analysis*. Springer-Verlag. United States. p. 146.
- [Best, Carlin, Spiegelhalter y van der Linde, 2002] Best, N.; Carlin, B.; Spiegelhalter, D.; van der Linde, A. (2002). Bayesian measures of model complexity and fit. *Journal of the royal statistical society. Series B (Statistical methodology)*. 64: 583-639.
- [Bollerslev, 1986] Bollerslev, T. (1986). Generalized autorregresive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*. 31:307-327.
- [BMV 2012] Grupo BMV. (2012). *Nota Metodológica del Índice de Precios y Cotizaciones IPC*. 11 de Abril de 2012, de Grupo BMV Sitio web: http://www.bmv.com.mx/wb3/wb/BMV/BMV_repositorio/rid/223/_mto/3/MetodologiaIPCvers11deabril.pdf
- [Buckley y Posada, 2004] Buckley, T. R.; Posada, D. (2004). Model selection and model averaging in phylogenetics: advantages of Akaike information criterion and Bayesian approaches over likelihood ratio tests. *Systematic Biologists*. 53:793-808.
- [Calzolari, Fiorentini y Panattoni, 1996] Calzolari G., Fiorentini G., Panattoni L. (1996). Analytic derivatives and the computation of garch estimates. *Journal of econometrics*. 2: 399-417.
- [Casas y Cepeda, 2008] Casas Monsegny, M.; Cepeda Cuervo, E. (2008). Modelos ARCH, GARCH y EGARCH: Aplicaciones a series financieras. *Cuadernos de Economía*. 27:287-319.
- [Chan, 2014] Chan Cab, Ricardo A. (2014). *Comparación y evaluación de la capacidad predictiva de modelos GARCH sobre el IPyC con errores de distribución normal*. (Tesis de licenciatura). Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán.
- [Chang, 2002] Chang, N. H. (2002). *Time series applications to finance*. John Wiley and Sons. United States. pp. 102-116.
- [Chatfield, 2001] Chatfield, C. (2001). Time-series forecasting. Chapman and Hall. United States.
- [Diebold y Mariano, 1995] Diebold, F.; Mariano, R. (1995). Comparing forecast accuracy. *Journal of bussines economics and statistics*. 13: 253-265.

- [Duran, Lorenzo, Ruiz 12] Durán Vázquez, R.; Lorenzo Valdés, A.; Ruíz Porras, A. (2012). Un modelo GARCH con asimetría condicional autorregresiva para los rendimientos del índice de precios y cotizaciones. Disponible la versión electrónica en <http://mpr.ub.uni-muenchen.de/42548/>.
- [Engle, 1982] Engle, R.F. (1982). Autorregresive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*. 50:987-1007.
- [Engle y Ng, 1993] Engle, R.; Ng., V. (1993). Measuring and testing the impacts of news on volatility. *Journal of finance*. 48:1749-1778.
- [Francq y Zakoian, 2010] Francq, C.; Zakoian, J. (2010). *GARCH Models: Structure, statistical inference and financial applications*. John Wiley and Sons. UK, Wiltshire. pp. 7-28, 141-143, 150-151, 194-195, 247.
- [Grier y Grier, 2000] Grier, R. M.; Grier, K. B. (2000). Political Cycles in Nontraditional Settings: Theory and Evidence from the Case of Mexico *Journal of law and economics*. 43: 239-264.
- [Hyndman y Koehler, 05] Hyndman, R.; Koehler, A. (2005). Another look at measures of forecast accuracy. Disponible su versión electrónica en <http://www.buseco.monash.edu.au/depts/ebs/pubs/wpapers/>.
- [Kullback y Leiber, 1951] Leiber, R. A.; Kullback, S. (1951). On information and sufficiency. *Annals of mathematical statistics*. 22:79-86.
- [Lorenzo y Ruiz, 11] Lorenzo Valdés, A.; Ruíz Porras, A. (2011). Modelación de rendimientos bursátiles mexicanos mediante los modelos TGARCH y EGARCH: Un estudio econométrico para 30 acciones y el índice de precios y cotizaciones. Disponible la versión electrónica en: <http://mpr.ub.uni-muenchen.de/36872/>.
- [Lopez, 2004] López Herrera, F. (2004). Modelado de la volatilidad y pronóstico del índice de precios y cotizaciones de la bolsa mexicana de valores. *Contaduría y administración*. 213. Disponible en <http://www.ejournal.unam.mx/rca/213/RCA21302.pdf>.
- [Nelson, 91] Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*. 59:347-370.
- [Nyblom, 89] Nyblom, J. (1989). Testing for the constancy of parameters over time. *Journal of the American Statistical Association*. 84(405):223-230.
- [Ozun y cifter, 07] Özun, A.; Çifter, A. (2007). The predictive performance of asymmetric normal mixture GARCH in risk management: evidence from turkey. *Journal of BRSA banking and financial markets*. 1:7-34.
- [R, 07] Development Core Team (2012): *R: A language and environment for statistical computing*. R foundation for statistical computing, Viena, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL: www.R-project.org.
- [Robles, 02] Robles Fernández, M. D. (2002). Medidas de volatilidad. *Revista española de financiación y contabilidad*. 31: 1073-1110.
- [Ruiz, 2011] Ruíz González, A. (2011). Estimación del índice de volatilidad en México (VIMEX) usando modelos GARCH.
- [Taylor, 1987] Taylor, C. (1987). Akaike's information criterion and the histogram. *Biometrika*. 74:636-639.
- [Tsay, 1984] Tsay, R. S. (1984). *Analysis of financial time series*. 2ª Ed. John Wiley and Sons. Estados Unidos, New Jersey. pp. 1-5, 113-116.