

Estimación de los parámetros de inmersión del meteoro de Chelyabinsk a partir de imágenes disponibles en la Internet

Jorge Lugo-Jiménez^{a,1}, Daniel Mena Romero^{b,2}, Daniel G. Cantón Puerto^{a,3}

^aFacultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán

^bFacultad de Ingeniería Química, Universidad Autónoma de Yucatán

¹jlugo@uady.mx, ²mromero@uady.mx, ³dgcanton@uady.mx

Abstract

On February 15th, 2013 at about 9:20 local time, a large size spatial object passed through the terrestrial atmosphere at high speed turning into dust near the Russian city of Chelyabinsk. In this work, we developed a mathematical model that determine the dynamic of the meteor during its crossing the Earth's atmosphere. We acquire important data from public video recordings posted on Internet that was used to adjust polynomially the initial conditions of immersion. Finally, we showed a method based in projective coordinates that is useful to determine the direction of the meteor from images of the shadows produced by its brightness.

Resumen

El 15 de febrero de 2013, alrededor de las 9:20 horas tiempo local, un objeto espacial de gran tamaño se introdujo a gran velocidad en la atmósfera de la Tierra para desintegrarse en las cercanías de la ciudad rusa de Chelyabinsk. Este trabajo desarrolla un modelo matemático que determina la dinámica del meteoro durante su recorrido en la atmósfera terrestre. Después, a partir de videograbaciones públicas disponibles en la Internet, se obtienen importantes datos que permiten ajustar polinomialmente las condiciones iniciales de inmersión. Finalmente, se ejemplifica un método basado en coordenadas proyectivas que es útil para determinar la dirección del meteoro a partir de una imagen fotográfica de las sombras que produce su brillo.

Keywords and phrases : Chelyabinsk meteor, dynamics, parallax, projective coordinates.

2010 *Mathematics Subject Classification* : 65L06, 85-04, 70F40

1. Introducción

Muchos fenómenos naturales son de tal complejidad que requieren de una simulación computacional para su estudio. La utilidad se hace más evidente en situaciones donde la implementación física es costosa o imposible.

El 15 de febrero de 2013, un cuerpo celeste de gran tamaño se introdujo en la atmósfera terrestre a gran velocidad dejando a su paso una larga y densa estela de humo antes de desintegrarse sobre una región cercana a la ciudad rusa de Chelyabinsk en los Montes Urales (ver Figura 1). Este suceso poco común que



Figura 1: Estela de gas y polvo dejado por el meteorito.

dejó numerosos heridos y cuantiosos daños a la ciudad debido a la enorme energía liberada, fue videograbado por un gran número de testigos en diversos puntos de la región. [1, 2, 3, 4, 8]

Un meteorito es un fenómeno que se puede observar en la atmósfera terrestre que difiere en gran medida de un meteoritoide que representa a un cuerpo celeste cuyas dimensiones son menores a 10 m de diámetro. Si el meteorito es bastante luminoso, este recibe el nombre de bólido. En contraste, un meteorito es un objeto espacial que impacta la superficie de otro cuerpo celeste.

Durante el proceso de formación del sistema solar los meteoritos fueron esenciales para que los planetas adquirieran su enorme masa. En el caso de la Tierra se obtuvieron elementos y compuestos químicos esenciales para la vida como el agua, oxígeno, hierro, calcio entre otros. Ahora, después de varios miles de millones de años, el número de colisiones ha cesado en gran medida, sin embargo, aún ocurren esporádicamente algunos impactos sobre la superficie terrestre.

La mayor cantidad de meteoroides provienen del cinturón de asteroides entre las órbitas de Marte y Júpiter, y de las caídas de los cometas que regularmente se aproximan al Sol.

Un factor importante que determina el destino de los pequeños asteroides en su inmersión a una atmósfera planetaria es su constitución química. Al respecto, un 76 % la constituyen aquellos formados por silicatos y carbono, un 23 % por los de hierro y níquel y, finalmente, la composición mixta de silicatos y metales que constituye el porcentaje restante. En el caso de los objetos formados por silicatos y carbono, denominados condritas, estos se desintegrarán fácilmente en su travesía por la atmósfera debido a la fuerza de choque con el aire, mientras que los objetos metálicos llegarán casi intactos a la superficie. En particular, si el asteroide es suficientemente grande éste impactará la superficie del planeta independientemente de su constitución.

En este trabajo se aportan cálculos no publicados anteriormente, que muestran una correlación entre los parámetros de inmersión del meteorito y permiten verificar la precisión de los datos divulgados por otros autores. Así como un enfoque geométrico basado en coordenadas proyectivas que es útil para determinar la posición del objeto en cada punto de su trayectoria.

De esta forma, en la siguiente sección se desarrolla un modelo matemático que describe el movimiento del meteorito durante su trayectoria en la atmósfera terrestre, tomando en cuenta las características físicas de los asteroides. En la Sección 3, se logra un ajuste polinomial para las condiciones iniciales de velocidad y dirección del asteroide en su entrada a la atmósfera de la Tierra. Y finalmente, en la Sección 4 se utilizan las propiedades de las coordenadas proyectivas para determinar la dirección del meteorito con respecto a un punto de Chelyabinsk. Se encuentra la resolución mínima que deben tener las videocámaras para calcular la distancia del meteorito al punto de referencia dado.

2. METODOLOGÍA

Los datos de velocidad y dirección iniciales del objeto en su inmersión a la atmósfera son útiles para estimar las características orbitales del meteorito. En este caso, el cálculo preciso de los parámetros de inmersión

del meteoro de Chelyabinsk proporcionan información relevante sobre la dinámica de cuerpos con órbitas similares que podrían, al igual que este objeto, eludir los detectores terrestres e impactar con la Tierra. Al respecto, De la Fuente et al. [5] estudia el caso en el cual el meteoro de Chelyabinsk pertenece a una familia de pequeños objetos que pertenecieron al asteroide 2011 EO₄₀.

Modelo matemático

La trayectoria del objeto se puede obtener mediante la resolución de las ecuaciones de la dinámica que describen su movimiento. En este caso, el movimiento de un objeto de masa m en la atmósfera terrestre está dado por la relación

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad (2.1)$$

siendo \vec{a} la aceleración debida a la resultante de las fuerzas F_i que actúan sobre el objeto.

En nuestro caso,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_g + \vec{f}_a \quad (2.2)$$

donde \vec{F}_g es la fuerza de gravitación terrestre y \vec{f}_a la resistencia del aire a altas velocidades. Para un movimiento muy veloz y cercano a la superficie terrestre la fuerza de gravedad puede considerarse constante y la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad, por lo que la ecuación (2.2) puede reescribirse como

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = mg\hat{j} - \frac{1}{2}C\rho_a A v \vec{v} \quad (2.3)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, \vec{v} es la velocidad, C es un coeficiente de arrastre que depende de la forma del objeto, A es el área de su sección transversal y ρ_a la densidad atmosférica.

A partir de la ecuación de equilibrio hidrostático y la ley de los gases ideales, la densidad atmosférica a una temperatura constante T está dada por

$$\rho_a = \rho_n e^{-h/H} \quad (2.4)$$

donde h es la altura sobre la superficie, $\rho_n \approx 1.2 \text{ kg/m}^3$ es la densidad atmosférica al nivel del mar y H es la llamada escala de altura dada por

$$H = \frac{kT}{\mu g} \quad (2.5)$$

con μ la masa representativa del aire y k la constante de Boltzmann. En promedio, $H \approx 8.5 \text{ km}$ es la altura que concentra la mayor parte de la atmósfera.

De la ecuación (2.3) se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} &= -g - \frac{1}{2}C\rho_n A e^{-h/H} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_y \\ \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{2}C\rho_n A e^{-h/H} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_x \\ \frac{dh}{dt} &= v_y. \end{aligned} \quad (2.6)$$

El cual se puede reescribir en términos adimensionales de la velocidad total u , dirección θ y altura y , como

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= -\alpha \sin \theta - \beta e^{-\gamma y} u^2 \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= -\frac{\alpha}{u} \cos \theta \\ \frac{dy}{d\tau} &= \eta u \sin \theta \end{aligned} \quad (2.7)$$

con los parámetros

$$\alpha = \frac{g\tau_0}{v_0}, \quad \beta = \frac{3\rho_n v_0 \tau_0}{8\rho_0 D_0}, \quad \gamma = \frac{h_0}{H}, \quad \eta = \frac{v_0 \tau_0}{h_0} \quad (2.8)$$

donde $u = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}/v_0$, $y = h/h_0$ y $\tau = t\tau_0$, teniendo h_0 , v_0 como la altura y velocidad de inmersión del meteorito en la atmósfera terrestre y τ_0 el tiempo de vida de meteorito. Se consideró al meteorito como un pequeño asteroide esférico (coeficiente $C \approx 0.5$) con diámetro $D_0 \approx 20$ m y densidad típica $\rho_0 = 2$ g/cm³. Las condiciones en $\tau = 0$ serán $y(0) = 1$, $u(0) = 1$ y $\theta(0) = \theta_0$.

3. AJUSTE POLINOMIAL

A partir de los vídeos disponibles en la Internet [9, 10, 11], se establecen la duración del fenómeno $\tau_0 \approx 11$ desde la aparición del objeto hasta el punto de máximo brillo, y la altura de cruce $h_c \approx 27$ km con el tiempo transcurrido entre el paso cenital y la llegada del golpe sónico. De igual forma, la altura inicial del meteorito $h_0 \approx 100$ km corresponde a la altura promedio de encendido de los meteoros observados en la atmósfera.

Para simular la posible trayectoria del meteorito se integró numéricamente el sistema de ecuaciones (2.7) mediante el método de Runge Kutta de cuarto orden con un tamaño de paso de 0.0001 s en el cual se hizo variar la velocidad de entrada desde 5 hasta 25 km/s con un paso de 0.1 km/s, y para cada caso, el ángulo de entrada tuvo una variación de -60° hasta -10° con un paso de 1° . De las trayectorias obtenidas se seleccionaron aquellos valores de inmersión iniciales (v_0, θ_0) cuya altura final después de $\tau_0 \approx 11$ se encontrara dentro el intervalo 27 ± 0.25 km. Estos intervalos se establecieron tomando como referencia los datos reportados por Popova y Nemchinov [8] sobre bólidos registrados por The European bolide Network.



Figura 2: Cruce del meteorito sobre la ciudad de Korkino.

El conjunto de puntos obtenidos se muestran en la Figura 3 y Figura 4, a los cuales, adicionalmente, se les ha ajustado un polinomio de cuarto grado, dado que los polinomios de grado menor no cumplían el requisito de un coeficiente de correlación mayor a 0.95. En los modelos calculados se obtuvo una correlación $R^2 > 0.9992$.

Para el modelo $V_0 = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4$ los coeficientes son:

$$\begin{aligned} a_0 &= 62.3839555 \\ a_1 &= 4.00262189 \\ a_2 &= 0.12309197 \\ a_3 &= 0.00179522 \\ a_4 &= 1.0031 \times 10^{-05} \end{aligned} \quad (3.1)$$

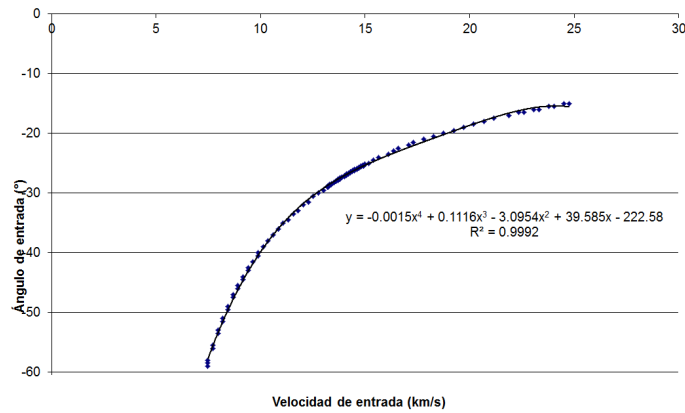


Figura 3: Ajuste de los valores de la velocidad inicial para diferentes valores del ángulo de entrada.

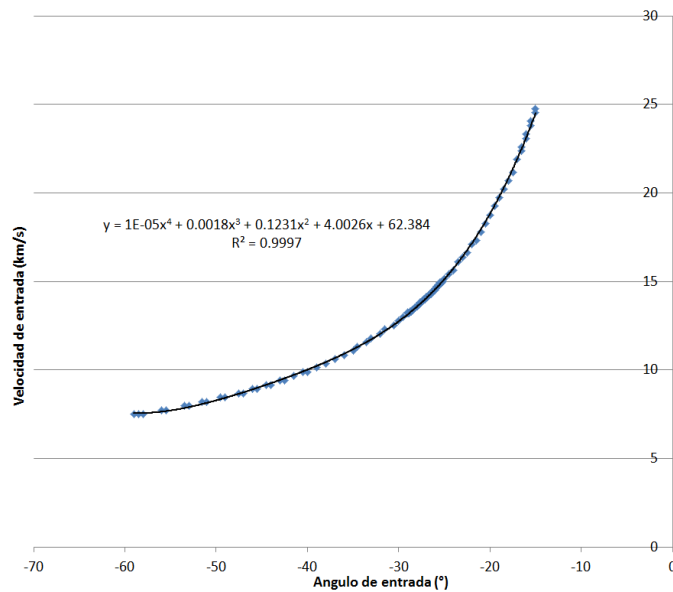


Figura 4: Ajuste de los valores del ángulo de entrada para diferentes valores de la velocidad inicial.

Para el modelo $A = a_0 + a_1V_0 + a_2V_0^2 + a_3V_0^3 + a_4V_0^4$ los coeficientes son:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -222.577703 \\
 a_1 &= 39.5854579 \\
 a_2 &= -3.0954331 \\
 a_3 &= 0.11159247 \\
 a_4 &= -0.00151483
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Otro aspecto que ayuda a determinar los parámetros de inmersión del meteoro es su distancia recorrida antes de desintegrarse. En este caso, la longitud de la estela de humo medida en una imagen obtenida por el satélite DMSP F-16 poco tiempo después del cruce es ~ 200 km [6], que junto con los resultados del modelo y el ajuste polinomial permiten relacionar el ángulo de entrada y la velocidad de entrada en los valores $v_0 \sim 18$ m/s y $\theta \sim -20^\circ$, muy cercanos a los reportados en la literatura y en varios medios de información [4].

A continuación, se muestra el método de coordenadas proyectivas utilizado por Mohr y Arbogast [7] para determinar la posición de un punto faltante en una imagen proyectada, pero aplicado a imágenes fotográficas

donde haya sombras debidas al brillo del meteoro. Se escogió la Plaza de la Revolución en el centro de Chelyabinsk como punto de referencia debido a la evidencia filmica disponible en la Internet. Finalmente, si se tienen imágenes con resolución suficiente, el método puede servir para determinar la posición del meteoro a lo largo de su trayectoria.

4. Método de coordenadas proyectivas de un punto

Dada una configuración de puntos como se muestra en la Figura 5, la razón cruzada k está definida por

$$k = \frac{\text{sen}(APC)}{\text{sen}(BPC)} \times \frac{\text{sen}(BPD)}{\text{sen}(APD)} \quad (4.1)$$

y se representa por

$$k = (PA, PB, PC, PD). \quad (4.2)$$

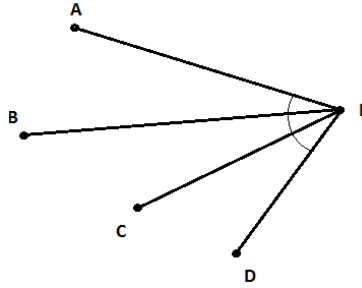


Figura 5: Configuración de puntos en un plano.

A partir de lo anterior, se definen las coordenadas proyectivas (k_1, k_2) de un punto X como $k_1 = (BA, BD, BC, BX)$ y $k_2 = (CD, CA, CB, CX)$. Dicha configuración se muestra en la Figura 6.

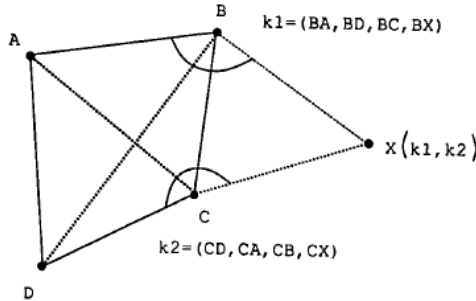


Figura 6: Coordenadas proyectivas (k_1, k_2) .

Para el caso de la imagen de la Figura 7, se puede calcular las coordenadas proyectivas (k_1, k_2) del punto Q con respecto a los vértices B y C :

1. Respecto al vértice B se tiene

$$k_1 = \frac{\text{sen}(111^\circ)}{\text{sen}(81^\circ)} \times \frac{\text{sen}(127^\circ)}{\text{sen}(157^\circ)} = 1.934 \quad (4.3)$$

2. Respecto al vértice C se tiene

$$k_2 = \frac{\text{sen}(68^\circ)}{\text{sen}(34^\circ)} \times \frac{\text{sen}(67^\circ)}{\text{sen}(101^\circ)} = 1.555 \quad (4.4)$$

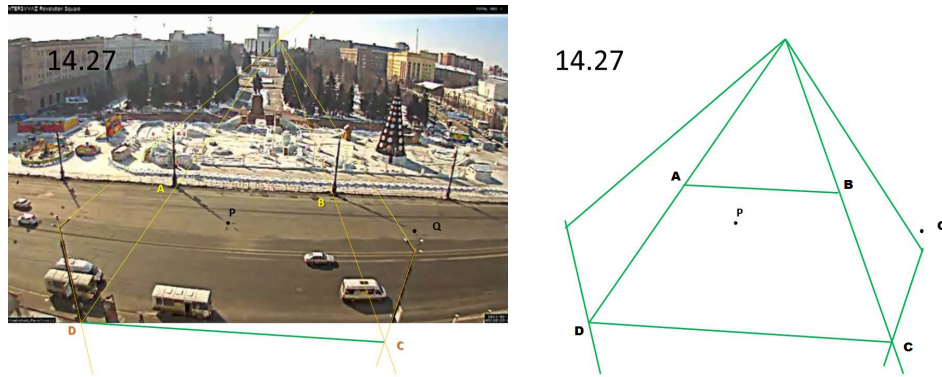


Figura 7: Posición del punto Q .

Los ángulos que se utilizan en el cálculo de k_1 y k_2 se muestran en la Figura 8.

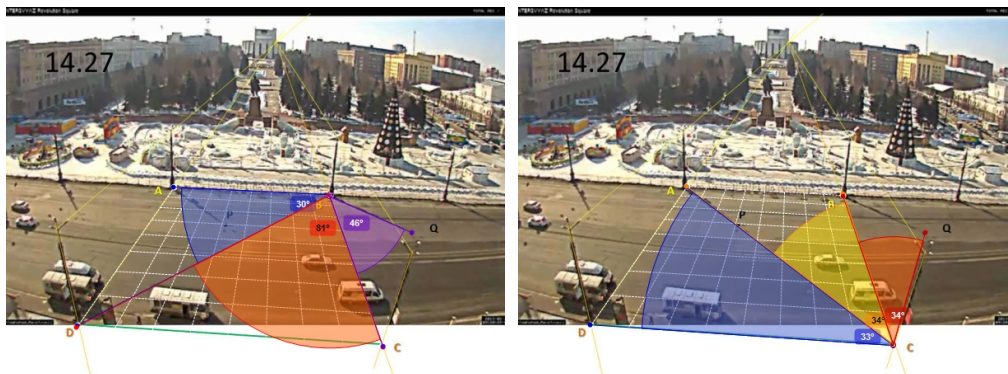


Figura 8: Ángulos para las razones cruzadas k_1 y k_2 .

Ahora mediante un proceso inverso, consistente en hallar la intersección de las rectas correspondientes a las razones cruzadas k'_1 y k'_2 dadas, se determina el punto Q' que será proyección del punto Q en un plano horizontal. Ver la Figura 9.

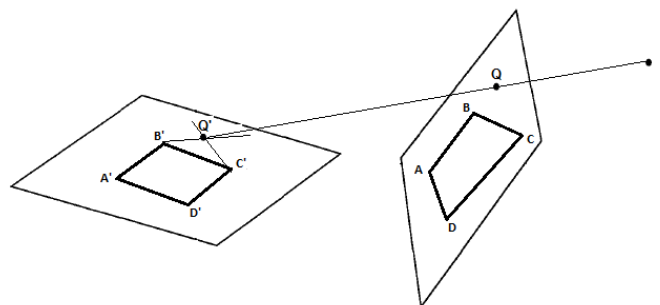


Figura 9: Puntos proyectados.

Para esto, sea Q' un punto tal que $k'_1 = k_1$ y $k'_2 = k_2$, para k_1 y k_2 valores dados. En la Figura 10 se muestra la posible posición del punto Q' en una imagen satelital de la Plaza de la Revolución (Google Maps 2014).

Para evitar una excesiva notación, se colocan los puntos A , B , C y D , en lugar de sus correspondientes

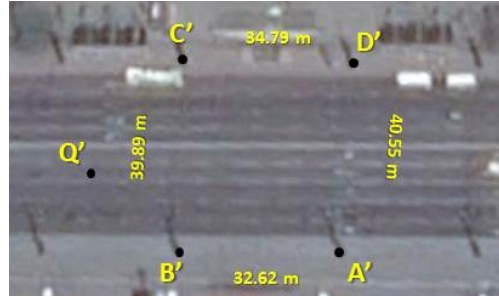


Figura 10: Posible posición del punto Q' .

proyecciones A' , B' , C' y D' . De esta forma, el problema se reescribe en términos vectoriales como

$$k'_1 = \frac{|\vec{BA} \times \vec{BC}| |\vec{BD} \times \vec{BQ}'|}{|\vec{BD} \times \vec{BC}| |\vec{BA} \times \vec{BQ}'|} \quad (4.5)$$

En este caso, sólo es necesario construir el vector variable $B\vec{Q}'$ para cada punto de la imagen, ya que los demás son fijos (de acuerdo a un origen O). De forma similar se procede con k'_2 . Ver las Figuras 11 y 12.

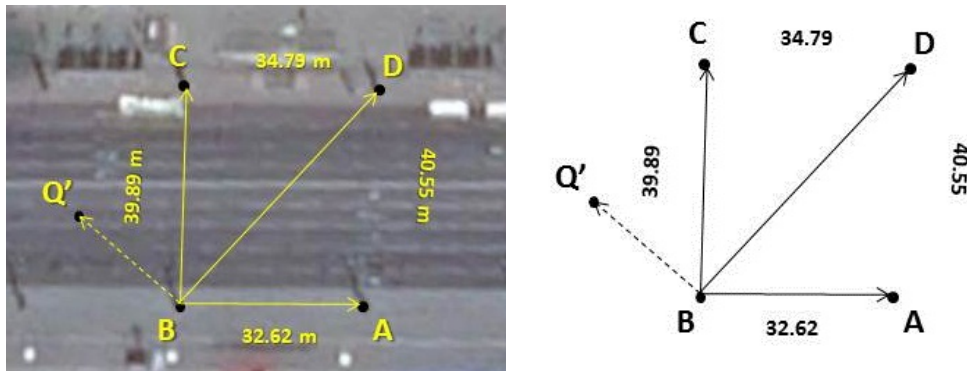


Figura 11: Coordenadas proyectivas (k'_1, k'_2) del punto Q' respecto al vértice B.

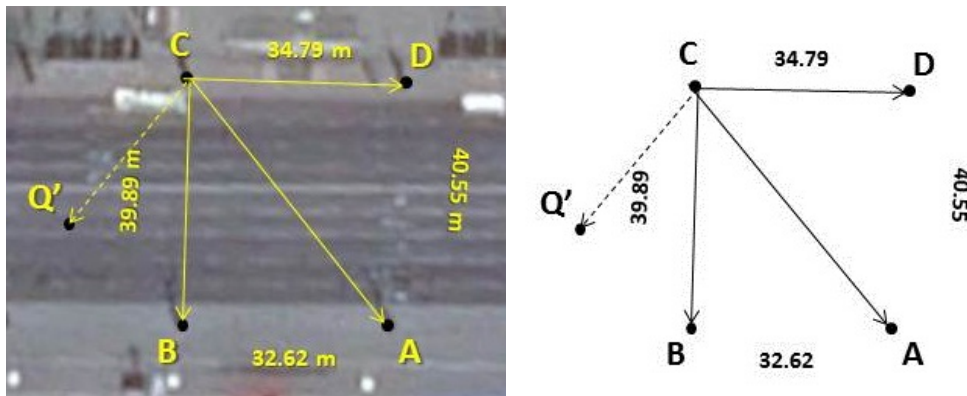


Figura 12: Punto Q' con coordenadas proyectivas (k'_1, k'_2) respecto al vértice C.

En este caso, la expresión para la coordenada proyectiva k'_2 está dada por

$$k'_2 = \frac{|\vec{CD} \times \vec{CB}| |\vec{CA} \times \vec{CQ}'|}{|\vec{CA} \times \vec{CB}| |\vec{CD} \times \vec{CQ}'|} \quad (4.6)$$

Con los valores k_1 y k_2 obtenidos previamente se obtuvo la posición del punto Q' . Dicha posición se muestra en la Figura 13, cuyo valor para la dirección es $\beta = 48^\circ$ en dirección E-S.

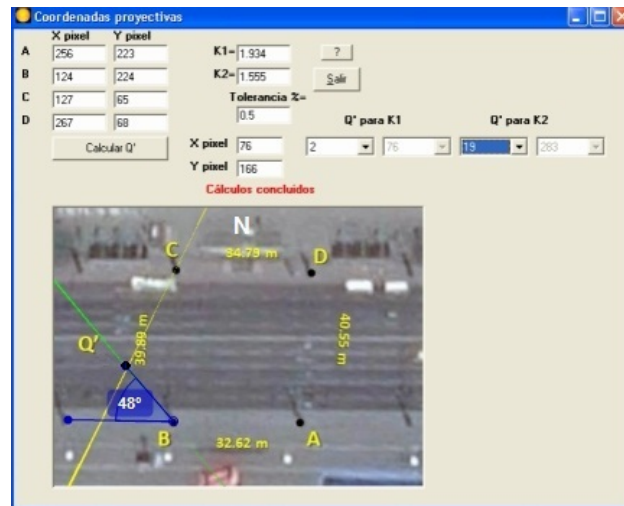


Figura 13: Punto Q' y su ángulo con respecto a la dirección Oeste.

Con una dirección adicional se puede estimar la distancia del objeto a la Plaza de la Revolución de Chelyabinsk mediante su paralaje. En este ejemplo se calculó la resolución mínima que debe tener la imagen para hallar la distancia al meteoro.

Mediante geometría se sabe que la distancia d a un punto M visto desde dos puntos distintos separados una distancia L está dado por la ecuación

$$d = \frac{L \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen}(\beta + \delta)}{\operatorname{sen} \delta} \quad (4.7)$$

donde $\beta = 48^\circ$ y $\delta = (\pi - \alpha) - \beta$ se muestran en la Figura 14.

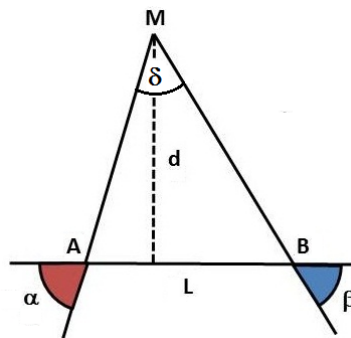


Figura 14: Paralaje de un objeto.

En la Figura 15 se muestra las distancias en función del ángulo de apertura entre las dos direcciones de sombra para los postes A y B de la imagen de la Plaza de la Revolución.

5. Conclusiones

Mediante un modelo matemático se resolvió de manera numérica el sistema de ecuaciones que describe la trayectoria del objeto cuyos resultados ($v_0 \sim 18$ m/s y $\theta \sim -20^\circ$) fueron consistentes con los publicados por

otros autores respecto a los parámetros de inmersión del meteorito a la atmósfera terrestre. Posteriormente, se analizó una metodología basada en coordenadas proyectivas que puede ser capaz de determinar la dirección del meteorito en cada instante de su trayectoria y, en el caso particular de contar con imágenes de alta resolución, calcular la lejanía del meteorito. En el ejemplo, la resolución mínima necesaria es de 5 minutos de grado. Por último, es importante mencionar que el cálculo de la trayectoria del meteorito es útil para la determinación con mayor precisión sus parámetros de inmersión, que a la vez, son esenciales para hallar el movimiento orbital del objeto antes de ingresar a la atmósfera terrestre. Con ello se podría deducir si el objeto pertenecía a alguna familia de objetos cercanos a la Tierra (NEO's por sus siglas en inglés), formaba parte de un antiguo cometa o fue expulsado del cinturón de asteroides.

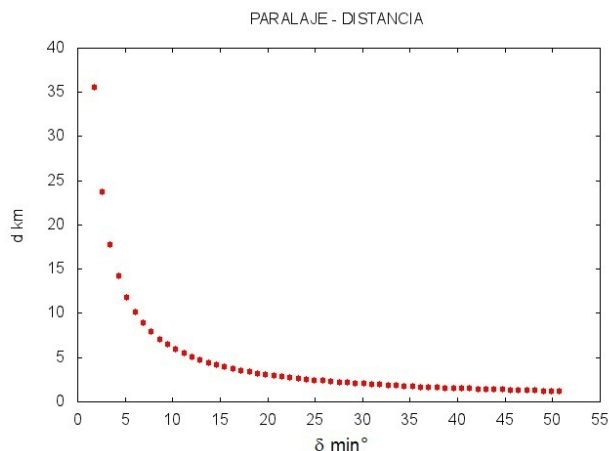


Figura 15: Cálculo de la distancia al objeto mediante paralaje.

En esta gráfica observamos que es necesario tener diferencias de ángulo δ menores a 5 min de grado para poder determinar distancias mayores a 15 km. Sin embargo, la imagen que se utilizó no posee esta resolución por lo que es necesario recurrir a videograbaciones de alta definición, o escoger dos puntos cuya separación sea la suficiente para suplir esta deficiencia.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer a la Universidad Autónoma de Yucatán todo el apoyo recibido para la elaboración de este artículo. En particular, Jorge Lugo desea agradecer a G. Gómez sus importantes comentarios sobre este trabajo.

Referencias

- [1] Artemieva, N. (2013), Russian skyfall, *Nature*, 503, 202.
- [2] Borovicka, J. Spurny, P. Brown, P., Wiegert, P., Kalenda, P. Clark, D. and Shrbeny, L. (2013). The trajectory, structure and origin of the Chelyabinsk asteroidal impactor, *Research letter, Nature*, 503, 235.
- [3] Brown, P. G. et al. (2013), A 500 kiloton airburst over Chelyabinsk and an enhanced hazard from small impactors, *Nature*, 503, 238.
- [4] Cardenas, G., Masa de meteorito en Rusia era de 7 mil toneladas, *El Universal*, 15 de febrero de 2013, sección ciencia, México. <http://www.eluniversal.com.mx/articulos/76395.html>

- [5] De la Fuente Marcos, C. and de la Fuente Marcos, R. (2013), The Chelyabinsk superbolide: a fragment of asteroid 2011 EO₄₀?, *MNRAS*, 436, L15.
- [6] Miller, S., Straka III, W., Bachmeier, A., Schmit, T., Partain, P., and Noh, Y. (2014), Earth-viewing satellite perspectives on the Chelyabinsk meteor event, *PNAS*, 110, 45, 18092.
- [7] Mohr R. and Arbogast, E. (1991), It can be without camera calibration, *Pattern Recognition Letters* 12, 39.
- [8] Popova, O. P. and 58 collaborators (2013), Chelyabinsk airburst, damage assessment, meteorite recovery, and characterization, *Science*, 342, 1069.
- [9] Youtube (14/02/2013). метеорит над Челябинском [archivo de video]. Obtenido de <http://www.youtube.com/watch?v=4ZxXYscmgRg>
- [10] Youtube (14/02/2013). Падение метеорита в челябинске [archivo de video]. Obtenido de <http://www.youtube.com/watch?v=bXifSi2K278>
- [11] Youtube (15/02/2013). Коркино. Метеорит [archivo de video]. Obtenido de <http://www.youtube.com/watch?v=odKjwrjIM-k>