

Hombre versus máquina

^aWaldemar Barrera Vargas, ^bMiguel Angel Can Ek

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, México

^abvargas@uady.mx, ^bmcan@uady.mx

Abstract

In this expository article we discuss three classic problems of college mathematics: Kiepert hyperbola, Newton-Raphson method and dissection of a hexaedron, where the use of the computer apparently gives a contradiction with its classic solutions. We explain what is wrong in this process where the software Matlab and Geogebra gives erroneous results or incomplete.

Resumen

En este artículo exponemos tres problemas bien conocidos de matemáticas universitarias: Hipérbola de Kiepert, el Método de Newton-Raphson y bisección de un hexaedro regular, donde el uso de la computadora aparentemente da una contradicción con sus soluciones clásicas. Explicamos qué está mal en el proceso donde los programas Matlab y Geogebra dieron resultados erróneos o incompletos.

Keywords and phrases : Teaching-learning, numerical methods, euclidean geometry.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 97C99, 49M99, 51M04.

1. Introducción

La computadora desde su creación ha revolucionado el mundo y transformado nuestra realidad. Vivimos en una era digitalizada donde los niños manejan computadoras, tabletas, teléfonos inteligentes con gran naturalidad y destreza. Hay muchas herramientas computacionales que a los científicos les hacen la vida más fácil, como son Matlab, Maple, Mathematica, Geogebra; que con un simple clic en la computadora hacen millones de cálculos en segundos y nos dan resultados que son confiables y esos resultados o simulaciones numéricas, hacen que vivamos en esta era moderna donde podemos recibir correos electrónicos de cualquier parte del mundo. Pareciera que poco a poco vamos a una automatización de los saberes y no vemos lejana la época en que incluso las demostraciones en matemáticas pudieran hacerse con la computadora. Ejemplos de esto es el juego de Euclides (que puede verse en <http://euclidthegame.com/Tutorial/>) donde mediante un programa hecho en Geogebra, el estudiante pueda aprender a hacer construcciones geométricas.

Este trabajo surgió a partir de nuestra práctica docente al querer ejemplificar algunos conceptos usando la computadora. Grande fue nuestra sorpresa al observar que estos ejemplos entraban en conflicto con nuestros saberes matemáticos. La razón de estas aparentes paradojas eran las limitaciones de cálculo que tienen las computadoras caseras.

En la primera sección abordaremos el caso de una construcción geométrica que da lugar a una hipérbola. Mostraremos que dicho lugar geométrico pertenece a la cónica mencionada pero la máquina, en ciertos casos,

sólo puede aglomerar en una pequeña región los puntos calculados. En la segunda sección trabajaremos el método de Newton-Raphson para la búsqueda de raíces, exhibiendo un caso en donde el método es cíclico cuando es aplicado a una ecuación cúbica. En la tercera sección, mostraremos cómo el software Geogebra da una interpretación errónea en la medición de un ángulo interno de un hexágono regular, construido a partir de un cubo. Finalmente en la última sección damos las conclusiones, en donde claramente recomendaremos que debemos tener cuidado en este tipo de resultados dados por la computadora.

2. La hipérbola de Kiepert

Consideremos un triángulo ABC en cuyos lados se construyen exteriormente o interiormente triángulos isósceles ABC' , BCA' , ACB' semejantes entre sí. Las rectas AA' , BB' y CC' son concurrentes y llamemos X a este punto de concurrencia. Notemos que para hacer esta construcción los triángulos siempre son exteriores o interiores, no se permite combinar interior con exterior.

Construcción de la hipérbola de Kiepert usando Geogebra

Procedimiento

1. Tracemos un triángulo ABC
2. Tomemos un parámetro angular α tal que $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$
3. Construyamos en el exterior del triángulo ABC , los triángulos isósceles y semejantes entre sí, ABC' , BCA' y CAB' . Los ángulos de sus respectivas bases son iguales al parámetro α .
4. Tracemos las rectas AA' , BB' y CC' . Estas rectas son concurrentes. Sea X el punto de concurrencia.
5. Dibujemos el lugar geométrico que describe X al hacer variar α . Ver figura 1.

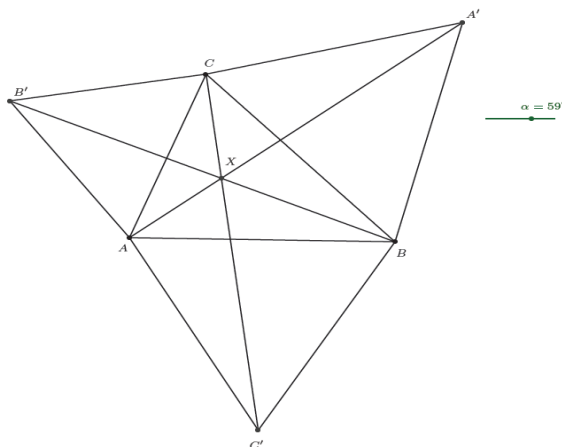


Figura 1: Construcción de triángulos

Ahora al hacer variar X observamos que la curva resultante parece un segmento de recta; ver figura 2.

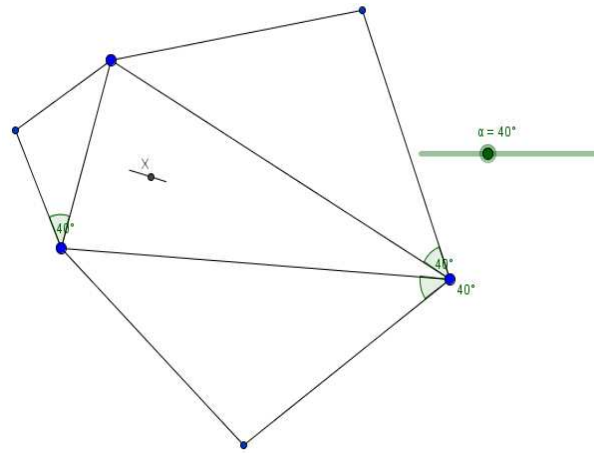


Figura 2: Construcción de triángulos

Ahora hagamos la misma construcción de la hipérbola de Kiepert con Matlab, trazando varios cientos de puntos. En la figura 3 usamos un triángulo genérico. Lo más que podemos observar es un montón de puntos acumulados y no podemos tener una idea clara del lugar geométrico que se genera, o al menos parecería, como en el caso de Geogebra, una recta.

De manera estadística, cuando aplicamos regresión lineal a los n pares ordenados que se usaron para intentar graficar a la hipérbola, encontramos que su coeficiente de correlación está cerca de la unidad. Este parámetro, es el cociente entre la covarianza y el producto de las desviaciones típicas de ambas variables. Si esta medida está muy cercana a la unidad, se dice que los puntos tienen una fuerte correlación lineal, entendiéndose por esto que los puntos “están muy cerca” de una recta. Para nuestro caso hemos calculado un total de 1350 puntos, y el coeficiente fue de 0.9995, algo así como que estadísticamente los puntos calculados estarían “casi” sobre una recta.

Si usáramos el procedimiento del método científico en el cual tenemos una conjetura y hemos replicado el resultado con dos tipos de software y en varias computadoras estaríamos sin duda con la autoridad de decir que el resultado es una línea recta.

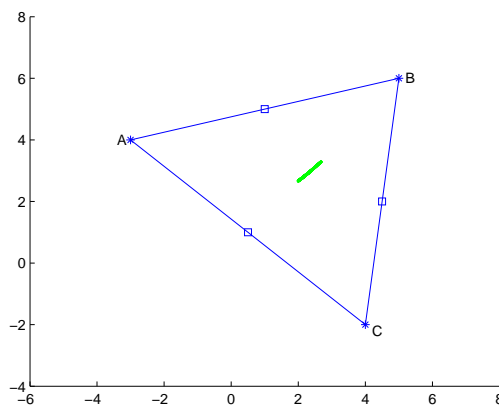


Figura 3: Gráfica de puntos

Sin embargo estamos en unos de esos problemas donde como en la fábula de Esopo: confío más en mi razón que en mis sentidos, pues el lugar geométrico de los puntos X es una hipérbola llamada *la hipérbola de Kiepert*, véase una demostración de este hecho en la web <http://mathworld.wolfram.com/KiepertHyperbola.html>. Podemos heurísticamente comprobar que es una hipérbola al seleccionar cinco puntos en el lugar geométrico

y pedirle a Geogebra que trace la cónica correspondiente y observamos que las curvas quedan perfectamente sobrepuestas, esto lo mostramos en la figura 4.

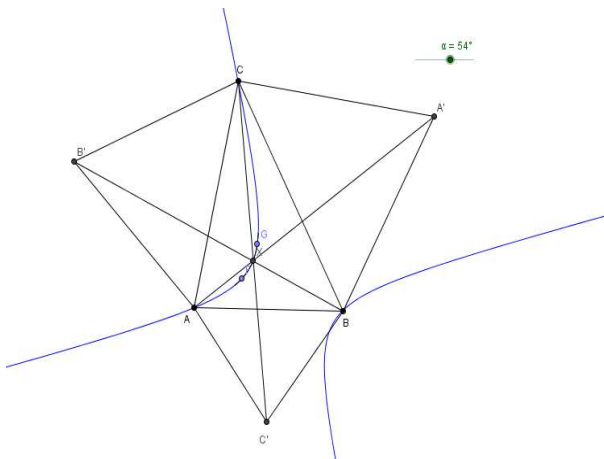


Figura 4: Construcción de hipérbola

De la misma manera, graficamos con el software Matlab la hipérbola de Kiepert, ver figura 5.

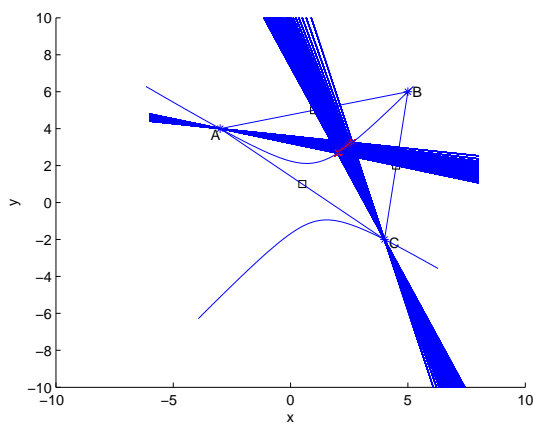


Figura 5: Construcción de hipérbola con Matlab

Las matemáticas se diferencian en esto porque mientras nuestra afirmación no venga acompañada de una prueba matemática, simplemente no es válida. La moraleja en este caso que Esopo tiene la razón y debemos desconfiar de nuestros sentidos.

Así pues, después de haber analizado algunos otros casos mediante Geogebra, observamos que si el triángulo en cuestión es casi isósceles, los puntos que se generan parecen estar con más notoriedad en una recta, como mostramos en la figura 6. Pero de nuevo hacemos énfasis en que gracias al conocimiento de la teoría sobre la hipérbola de Kiepert, no habría confusión o incertidumbre sobre qué tipo de lugar geométrico se trata.

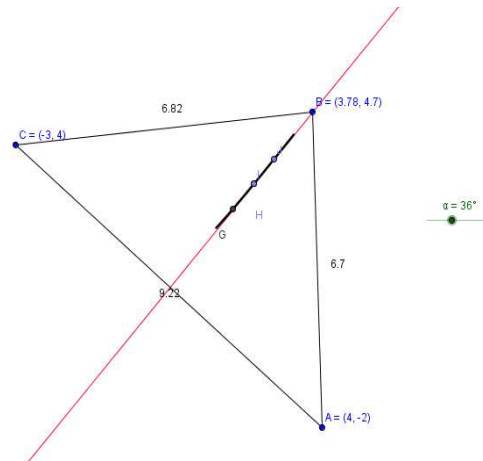


Figura 6: Caso de triángulo isósceles

De manera análoga, regresando al software Matlab, y basándonos en un triángulo escaleno, lo que en un principio parecía solo la porción de una recta por usar un triángulo casi isósceles, vemos con más claridad que se forma una hipérbola, como mostramos en la figura 7.

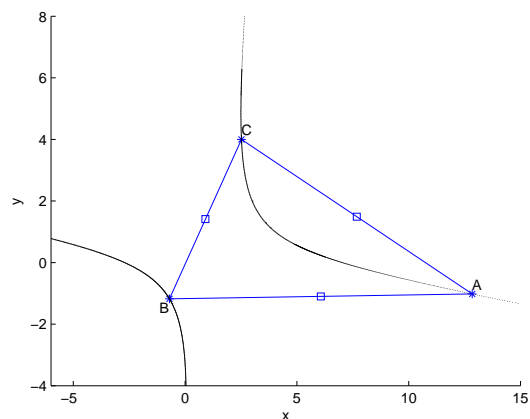


Figura 7: Caso triángulo escaleno

Antes de dar por finalizado esta parte del artículo, consideramos pertinente la siguiente observación. Originalmente, la hipérbola no se forma completa aún cuando se usa un triángulo escaleno, de modo que para llenar dicha parte tomamos al azar 5 puntos de los cientos que obtuvimos, para poder calcular los coeficientes de tal hipérbola en su forma general, es decir, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + 1 = 0$, y en vez de obtener la hipérbola de Kiepert, se obtuvo otra muy diferente, contrario al hecho de que debería de ser la de Kiepert. No se usó ningún punto del triángulo, de manera que los puntos estaban quizás muy cercanos y la solución del sistema lineal de ecuaciones conllevó el suficiente error de redondeo para generar otra hipérbola muy diferente. En la figura 8 mostramos dicho fenómeno.

Una alternativa para dilucidar el dilema en el trazado de la hipérbola de Kiepert, la cual sería más natural, consiste en modificar nuestro procedimiento de construcción con Geogebra, permitiendo que el ángulo α varíe entre -90° y 90° , y así obtener el trazo completo de la hipérbola. No optamos por esta vía por que queríamos contrastar con otro software nuestro procedimiento de construcción y fue de esa manera como obtuvimos una aparente contradicción.

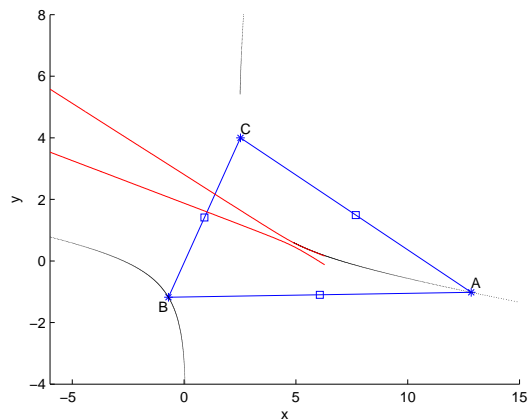


Figura 8: Caso degenerado de la hipérbola

3. Newton-Raphson en ciclo infinito

Uno de los grandes problemas del álgebra elemental de polinomios es hallar los ceros de dicho polinomio, proceso que puede ser una ardua labor y es bien conocido que únicamente para polinomios de grado menor o igual a cuatro podemos hallar las raíces con precisión. La ventaja de usar métodos numéricos como el de Newton-Raphson para hallar ceros de polinomios es que nos libera de las complicadas fórmulas algebraicas y podemos aproximar tanto como se quiera la solución. Con el afán de ser autocontenido recordemos brevemente cómo funciona el método de Newton-Raphson. Consideremos una función suave $y = f(x)$. Por simplicidad imaginemos que está definida en todo \mathbb{R} . De este modo, tomemos un valor inicial p_0 y consideremos el punto $(p_0, f(p_0))$ en la gráfica de f . Tracemos la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(p_0, f(p_0))$, esta recta corta al eje real en el punto p_1 y repetimos el algoritmo anterior para el valor p_1 en el punto $(p_1, f(p_1))$ y continuemos hasta el infinito. De esta manera obtenemos la sucesión

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)},$$

con p_0 como valor inicial, la cual converge a la raíz de f . Lo anterior lo podemos apreciar en la figura 9.

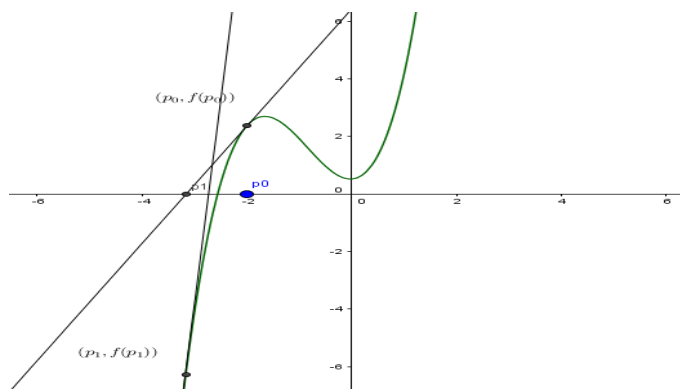


Figura 9: Método de Newton-Raphson

Este método bellísimo está basado en una idea geométrica de las tangentes a una curva, que no siempre funciona como se aprecia en los siguientes ejemplos.

El primer ejemplo se encuentra en ([CL01]). Ahí se muestra una función a la que se intenta hallar su raíz, que no es de corte trivial, si no que un tanto sofisticada obtenida de una ecuación diferencial, que incluso

anexamos aquí. La función es:

$$f(x) = \text{sign}(x - a)\sqrt{|x - a|}. \quad (3.1)$$

Es claro que tiene una raíz en $x = a$, pero el método de Newton-Raphson no es capaz de hallarla. La figura 10 da muestra de dicho ejemplo.

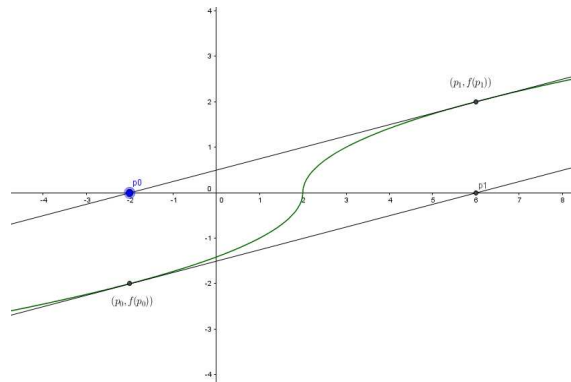


Figura 10: Ejemplo con ciclo infinito

Como observación, una de las desventajas de este método es que se necesita la derivada de esta función para construir el método iterativo, que en este caso se requiere un tanto de ingenio para su obtención.

El segundo ejemplo está disponible en

https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method#Starting_point_enters_a_cycle. Se trata de una función cúbica pero no nos dice cómo se obtiene. En la figura 11 mostramos dicho ejemplo.

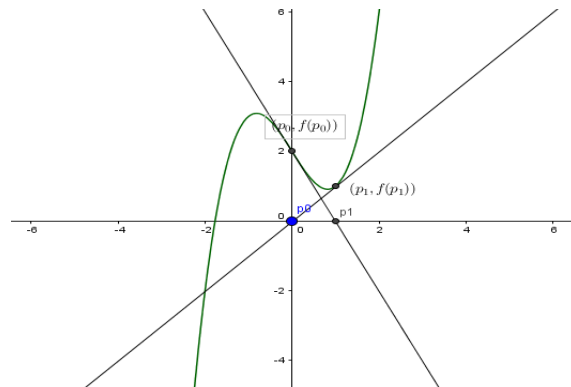


Figura 11: Ejemplo con ciclo infinito

Entonces, es válido preguntarse cómo podemos construir tales ejemplos. Pareciera que es mucha experimentación o inspiración divina lo que motiva al profesor a dar estos ejemplos. Mostraremos en esta sección que con un poco de geometría podemos construir dichos ejemplos donde el método de Newton-Raphson falla. Queremos construir un ejemplo con una función básica como lo es un polinomio de grado tres, y que en principio tiene la forma

$$f(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 \quad (3.2)$$

en donde $c_0 \neq 0$.

A continuación mostramos el procedimiento para hallar qué cúbica podría tener un ciclo infinito para el método de Newton-Raphson. Comencemos basándonos de la figura 12. Como podemos observar, las medidas a y b deben ser de tal manera que se forme un paralelogramo cuyos vértices son $(b, 0)$, (b, a) , $(-b, 0)$ y $(-b, -a)$. Aclaremos que p_0 denota el valor inicial del método iterativo y que p_1 es la siguiente iteración, la cual al tomar el lugar del valor inicial, regresa al inicio p_0 .

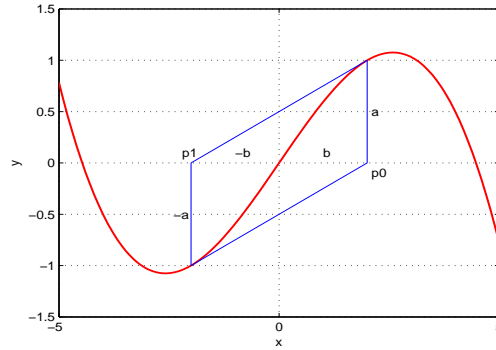


Figura 12: Caso genérico de ciclo infinito

Para encontrar el polinomio cúbico, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales. La primera y segunda ecuación las obtenemos del hecho de que la cúbica pasa por los puntos (b, a) y $(-b, -a)$ respectivamente, siendo estas

$$f(b) = c_0b^3 + c_1b^2 + c_2b + c_3 = a \quad (3.3)$$

$$f(-b) = -c_0b^3 + c_1b^2 - c_2b + c_3 = -a \quad (3.4)$$

Para las siguientes dos ecuaciones, usamos el hecho de que las pendientes de las tangentes se pueden calcular, siendo estas iguales a $\frac{a}{2b}$. Si usamos los puntos correspondientes (b, a) y $(-b, -a)$ pero ahora evaluados en la derivada de f los valores deben coincidir con las pendientes anteriores, así ya tenemos dichas ecuaciones, siendo estas

$$f'(b) = 3c_0b^2 + 2c_1b + c_2 = \frac{a}{2b} \quad (3.5)$$

$$f'(-b) = 3c_0b^2 - 2c_1b + c_2 = \frac{a}{2b} \quad (3.6)$$

Estas ecuaciones las podemos escribir en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} b^3 & b^2 & b & 1 \\ -b^3 & b^2 & -b & 1 \\ 3b^2 & 2b & 1 & 0 \\ 3b^2 & -2b & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a/2b \\ a/2b \end{pmatrix}$$

La solución de este sistema es

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{4b^3} \\ 0 \\ \frac{5a}{4b} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En conclusión, para cada pareja (b, a) , $b \neq 0$; el polinomio

$$f(x) = \frac{-a}{4b^3}x^3 + \frac{5a}{4b}x$$

tiene un ciclo infinito si tomamos el valor inicial $p_0 = b$.

Para el caso particular en que $a = 1$ y $b = 3$, tenemos que los coeficientes son $c_0 = \frac{-1}{108}$ y $c_2 = \frac{5}{12}$, de manera que la cúbica es

$$f(x) = \frac{-1}{108}x^3 + \frac{5}{12}x$$

cuya gráfica se muestra en la figura 13.

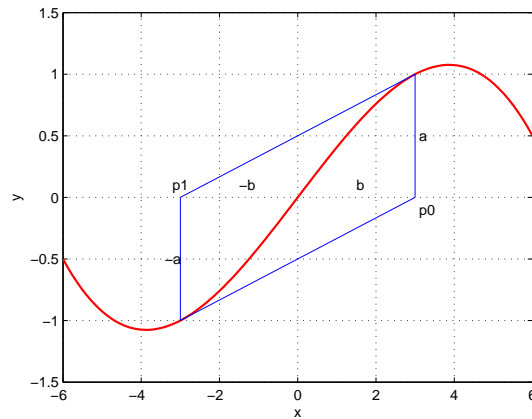


Figura 13: Ejemplo de ciclo infinito

Finalmente mostraremos con aritmética exacta, que dando el valor inicial $p_0 = 3$, las iteraciones se ciclan. Esto lo haremos con la fórmula iterativa del método.

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

$$p_1 = 3 - \frac{\frac{-1}{108}3^3 + \frac{5}{12}3}{\frac{-3}{108}3^2 + \frac{5}{12}}$$

$$p_1 = -3 - \frac{\frac{-27}{108} + \frac{15}{12}}{\frac{-27}{108} + \frac{5}{12}}$$

$$p_1 = 3 - \frac{1}{\frac{1}{6}} = -3$$

Ahora bien para calcular p_2 , tenemos

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)}$$

$$p_2 = -3 - \frac{\frac{1}{108}3^3 + \frac{-5}{12}3}{\frac{-3}{108}3^2 + \frac{5}{12}}$$

$$p_2 = -3 - \frac{\frac{27}{108} + \frac{-15}{12}}{\frac{-27}{108} + \frac{5}{12}}$$

$$p_2 = -3 - \frac{-1}{\frac{1}{6}} = -3 + 6 = 3$$

Vemos pues, que $p_2 = p_0$ lo que indica que el método se cicla. Es evidente que esta cúbica tiene una raíz en $x = 0$, pero el método de Newton-Raphson no es capaz de hallarla.

Con este ejemplo pareciera que el método de Newton-Raphson es falso, pero conviene aclarar que la convergencia solo está garantizada alrededor de un intervalo abierto de una raíz del polinomio. A continuación incluimos el teorema correspondiente cuya demostración puede consultarse en [BF05].

Teorema 3.1 Sea $f \in C^2[a, b]$. Si $r \in [a, b]$ es tal que $f(r) = 0$ y $f'(r) \neq 0$, entonces existe una $\delta > 0$ tal que el método de Newton genera una sucesión $\{r_n\}$ convergente a r para cualquier aproximación inicial $r_0 \in [r - \delta, r + \delta]$.

En nuestro ejemplo

$$f(x) = -\frac{1}{108}x^3 + \frac{5}{12}x$$

la raíz es $x = 0$ y la $\delta = 3$.

4. Caso 3D en 2D

Un problema clásico en geometría 3D es el siguiente:

Consideremos $ABCDEFGH$ un hexaedro regular como se ilustra en la figura 14.

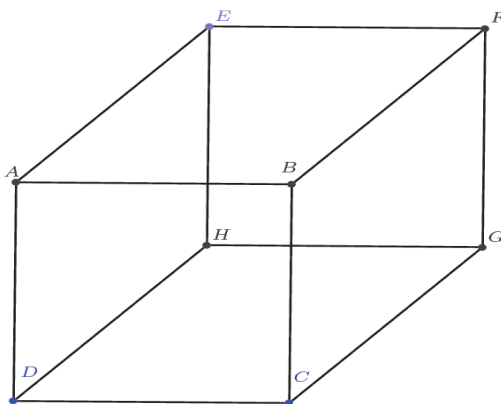


Figura 14: Hexaedro regular

Ahora sean P, Q, R, S, T, U los puntos medios de los lados AE, EF, FG, GC, CD y DA respectivamente. La figura que forman los puntos P, Q, R, S, T, U se muestra en la figura 15.

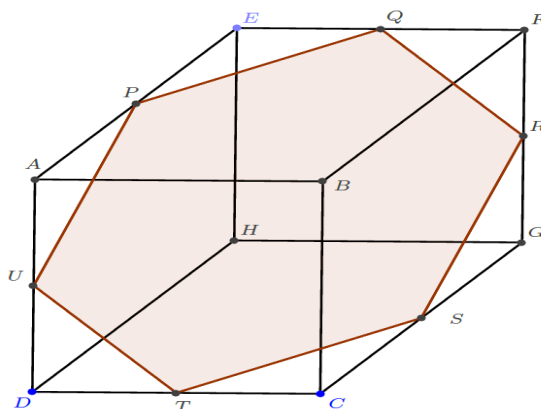


Figura 15: Hexágono en hexaedro

Proponemos entonces, el siguiente experimento en Geogebra 2D,

Construir un hexaedro en perspectiva y comprobemos en la computadora que $PQRSTU$ es un hexágono regular

Experimento

1. Construyamos un cuadrado $ABCD$ de lado 1.
2. Tracemos una circunferencia Γ de centro A y radio 1 y tomar un punto variable E en Γ distinto de B y D .
3. Tracemos AE
 - Por B tracemos $BF \parallel AE$
 - Por E tracemos $EF \parallel AB$
 - Por F tracemos $FG \parallel BC$
 - Por C tracemos $CG \parallel BF$
 - Por E tracemos $EH \parallel FG$
 - Por G tracemos $GH \parallel EF$
 - Por D tracemos $DH \parallel GC$
- Localicemos los puntos medios P, Q, R, S, T y U de AE, EF, FG, GC, CD y AD respectivamente.
- Medimos el ángulo UPQ y observemos lo que pasa.

En la figura 16 mostramos el hexaedro construido, mostrando dos medidas: dos aristas y la medida de tres ángulos en donde apreciamos que ninguno es de 120° como debería suceder. Estamos pues ante un problema en donde hemos seguido paso a paso una construcción que no deja de estar en el plano y Geogebra “no lo sabe” o al menos no tiene esa capacidad de diferenciarlo.

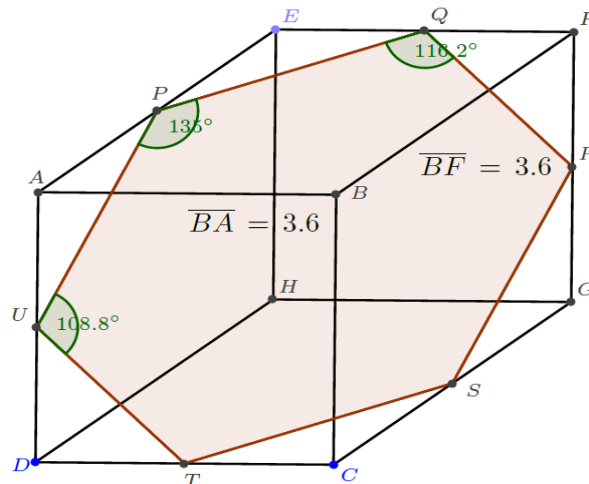


Figura 16: Construcción de hexágono

Por supuesto hasta hace poco se tiene Geogebra 3D el cual para generar construcciones utiliza dos vistas: una en el plano y una en perspectiva, y donde claramente este problema ya no se genera por que los puntos los interpreta como vectores en \mathbb{R}^3 , como mostramos en la figura 17, y para hacer sus cálculos emplea álgebra vectorial. Para sustentar esta afirmación observemos que los vértices en la vista 3D de Geogebra tienen tres coordenadas como ilustramos en la figura 18, pero ahora con la particularidad de que se muestran dichas coordenadas, es decir, para Geogebra 3D la construcción que proponemos siempre va ser plana como mostramos en la figura 19. Con esto observamos que a Geogebra 3D no podemos “engañar” visualmente, por que usa álgebra para describir sus coordenadas.

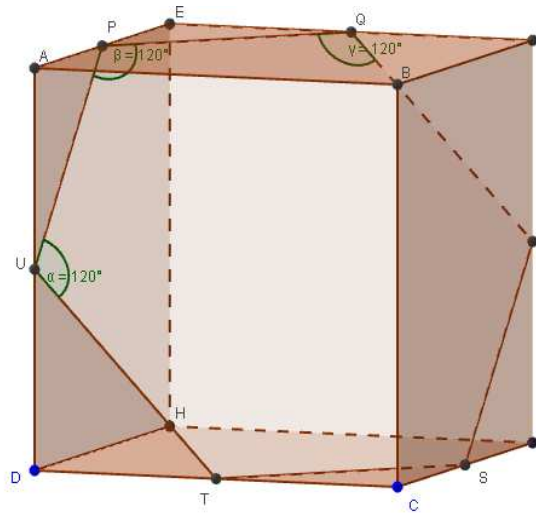


Figura 17: Cubo con Geogebra 3D

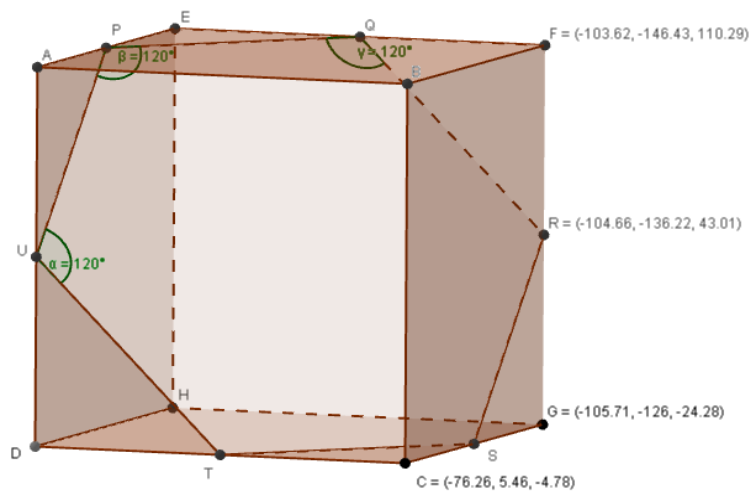


Figura 18: Cubo con Geogebra 3D

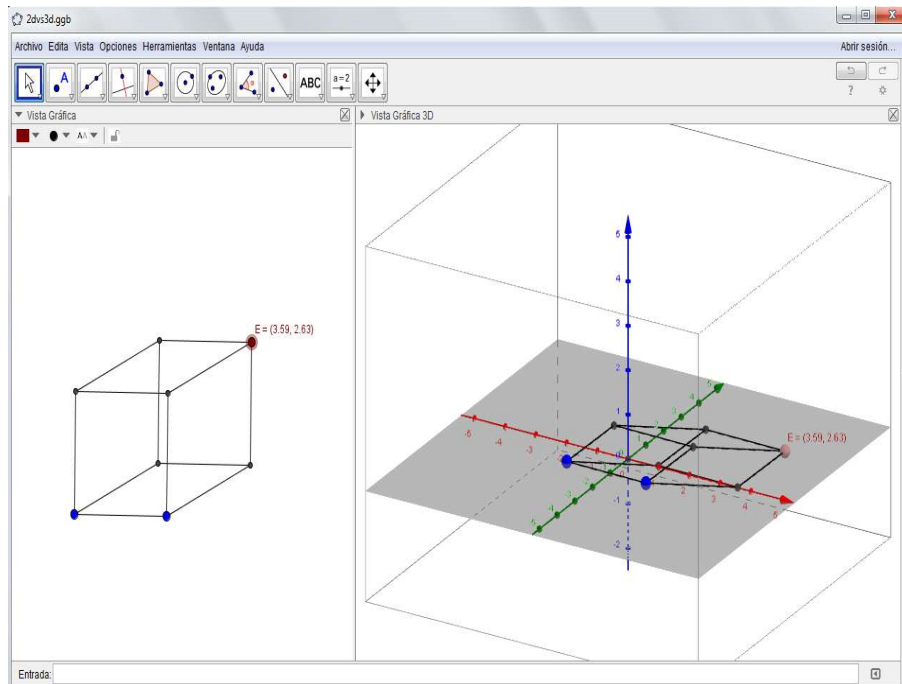


Figura 19: 2D vs 3D

Conclusiones

Leer la documentación de un software es muy importante, por que de esta manera sabemos sus limitaciones y alcances. Por ejemplo en el caso de Geogebra 2D aunque hagamos en apariencia una figura que semeja un cuerpo en tres dimensiones para Geogebra 2D sigue estando en el plano y todos los cálculos y mediciones de un objeto en el plano.

Para el caso de la hipérbola de Kiepert saber de antemano que es una hipérbola es una gran ventaja que permite utilizar correctamente el programa de Geogebra 2D y darle una “ayudadita” a la computadora en el trazo correcto de la gráfica, situación muy similar en Matlab pues aquí empleamos la fuerza bruta calculando varios cientos de puntos y luego hallamos en apariencia una recta, de manera que como se mostró en los casos expuestos, que los vértices del triángulo juegan un papel importante para la generación adecuada de los puntos, por lo que podemos asumir que debido a la cercanía de dichos puntos y el error de redondeo, no permite trazar más puntos de los que se obtuvieron.

En el caso del método de Newton-Raphson, más allá de un fallo de la computadora, tenemos que previamente sabemos que por construcción el método es cíclico y podría ser que debido a la simplicidad de la función la computadora confirma que dicho método es en efecto cíclico. Sería interesante encontrar una función en donde no le alcance la precisión de la máquina detectar tal ciclo.

Agradecimientos

Agradecemos mucho a la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán por el uso de sus instalaciones que nos han facilitado para la realización de este trabajo. Asimismo agradecemos a los árbitros por sus valiosas sugerencias que sirvieron para la mejora de este trabajo.

Referencias

- [CL01] Moler, Cleve. Numerical Computer Methods. 1974.
- [FL02] Floor van Lamoen and Paul Yiu. The Kiepert Pencil of Kiepert Hyperbolas. Forum Geometricorum. Volume 1 (2001) 125-132.

- [Hu03] Hugo Steinhaus. *Mathematical Snapshots*. Dover Publications. (3 edition, 1999).
- [Ed04] R. H. Eddy and R. Fritsch. The conics of Ludwig Kiepert: a comprehensive lesson in the geometry of the triangle. *Mathematics Magazine*, 67 (1994) 188-205.
- [BF05] Burden Richard L. and Faires J. Douglas. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole (2010).